

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES-PHYSIQUES

par

Claude HUMBERT

Ingénieur E.N.S.E.M. - Docteur en Spécialité

PREMIÈRE THÈSE : CONTRIBUTION A L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES.

DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : STABILISATION EN TEMPÉRATURE DES TRANSISTORS A EFFET DE CHAMP.

Soutenues le 10 Mars 1970, devant la Commission d'Examen

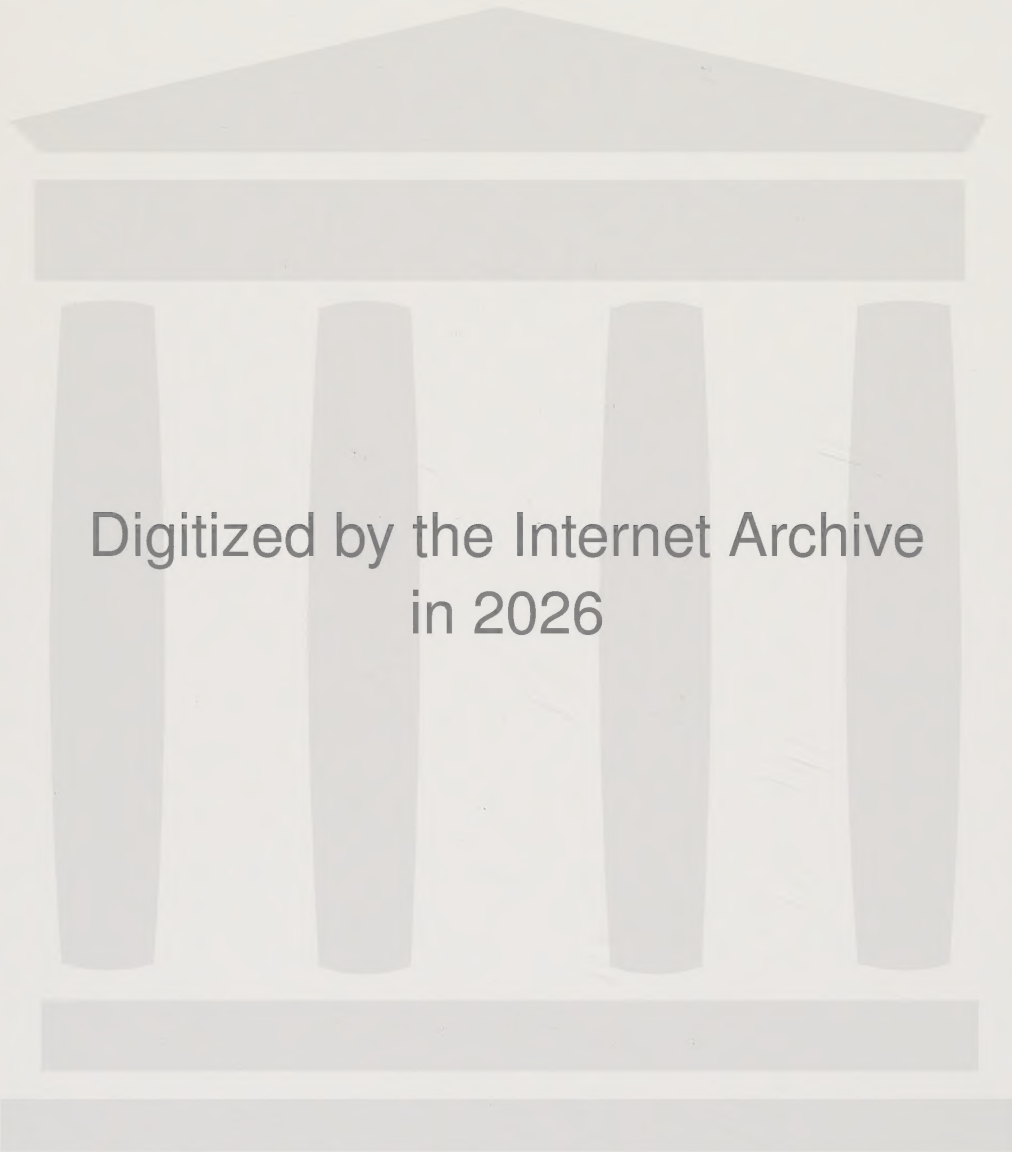
Membres du Jury

Président : M. R. GUILLIEN

Examineurs : MM. R. CHAUSSARD

A. FRUHLING

R. HUSSON



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551914_0011

THÈSES

NOUVEAU TITRE DE LA THÈSE

PAR M. le Docteur en Sciences

DOCTEUR EN SCIENCES

CH. WINBERT

Président de la Commission

THÈSE DE : CONTRIBUTION À L'OPTIMISATION QUANTITATIVE DES
SYSTÈMES ALÉATOIRES

THÈSE DE : OPTIMISATION QUANTITATIVE DES SYSTÈMES ALÉATOIRES
EN PRÉSENCE D'INCERTITUDES ET D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES

Présentée à l'Université de Nancy II

Présentée par

CH. WINBERT

UDART & CLÉMENT

RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11

Tél. 52.80.09 - NANCY

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES-PHYSIQUES

par

Claude HUMBERT

Ingénieur E.N.S.E.M. - Docteur en Spécialité

PREMIÈRE THÈSE : CONTRIBUTION A L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES.

DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : STABILISATION EN TEMPÉRATURE DES TRANSISTORS A EFFET DE CHAMP.

Soutenues le 10 Mars 1970, devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

Président : M. R. GUILLIEN

Examineurs : MM. R. CHAUSSARD
A. FRUHLING
R. HUSSON

1970

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES-PHYSIQUES

par

Claude HUMBERT

Ingenieur E.N.S.E.M. - Docteur en Mécanique

Première thèse : CONTRIBUTION A L'ANALYSE QUADRATIQUE DES
SYSTEMES LINEAIRES



Deuxième thèse : PROPOSITION DONNEE PAR LA FACULTE : STABILISATION
EN TEMPERATURE DES TRANSISTORS A EFFET DE CHAMP.

Soutenue le 10 Mars 1970, devant la Commission d'examen

Membres du Jury

Président : M. R. GILLES
Examinateurs : MM. R. CHASSARD
A. FROUARD
R. WISSON

1970

DOYEN : M. AUBRY
ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, LONGCHAMBON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, WAHL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART, PIERRET, Melle MATHIEU.

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie Animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie Théorique	*BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique Rationnelle	NEEL	Chimie Organique Industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie Appliquée
NICLAUSE	Chimie	*CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique Appliquée	*GAY	Chimie Biologique
AUBRY	Chimie Minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	*WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul Différentiel et Intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie Organique
LE GOFF	Génie Chimique	FELDEN	Physique
SUHNER	Physique Expérim.	*GOSSE	Mécanique Physique
CHAPON	Chimie Biologique	*DAVOINE	Physique (ENSMIM)
HEROLD	Chimie Minérale Industrielle	HORN	Physique (1 ^{er} Cycle)
SCHWARTZ B.	Exploitation Minière	*ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	DELPUECH	Chimie Physique
* MANGENOT	Botanique		
	N....	Chimie Biologique	
	N....	Mécanique Appliquée	
	N....	Analyse Supérieure	
	N....	Méthodes Mathématiques de la Physique	
	N....	Mécanique Rationnelle	

(*) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P. C. Epinal	BALESDENT	Thermodynamique,
MM. GUDEFIN	Physique		Chimie Appl. (ENSIC)
VUILLAUME	Psychophysiologie	BLAZY	Minéralogie Appliquée
FRENTZ	Biologie Animale		(ENSG)
MARI	Chimie (ISIN)	JANOT	Physique P. C. Epinal
AUROUZE	Géologie	CACHAN	Entomologie Appliquée
DEVIOT	Physique du Solide		(ENSA)
FLECHON	Physique P. C.	JACQUIN	Pédologie et Chimie
Melle HUET	Mathématiques CBG		Agricoles
VIGNES	Métallurgie	MAINARD	Physique M. P.
JURAIN	Géologie C. B. G.	MARTIN	Chimie P. C.
		PAULMIER	Mécanique Expérим.
		PROTAS	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES

MM. JOZEFOWICZ	Physico-Chimie	GERL	Physique (ENSEM)
RIVAIL	Chimie Appl. (CUCES)	ROQUES	Chimie Minérale
VILLERMAUX	Génie Chimique	FERRIER	Mathématiques
METCHE	Biochimie appliquée	GILORMINI	Mécanique (ISIN)
	(Brasserie)	DEXHEIMER	Botanique
PAIR	Mathématiques Appl.	CASTRO	Chimie Organique
BAUMANN	Physique 1 ^o Cycle	N....	Mécanique des
DURAND	Physique		fluides (ISIN)
GRANGE	Physique (ISIN)	N....	Mathématiques
DEPAIX	Probabilités et	N....	Mathématiques P. C.
	Statistiques	N....	Mathématiques CBG
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	N....	Physiologie Animale
CHAMBON	Exploitation Minière	N....	Mathématiques M. P.
	(ENSMIM)	N....	Chimie Organique
HUSSON	Physique (ENSEM)	N....	Chimie (ENSIC)
WEISSLINGER	Physique	N....	Mathématiques

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO, COEURE, DAVRAINVILLE, GIRARDEAU, HILY, MAURIN, NOVERRAZ, OVAERT, RUYER, WEBER.

* * * *

TABLE DES MATIERES

* . * . * . *

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : IDENTIFICATION DE SYSTEMES APERIODIQUES.	3
1) Introduction	3
2) Identification à partir de la réponse indicielle	4
3) Identification par double intégration du signal d'erreur	6
4) Comparaison avec la méthode temporelle d'identification	7
5) Exemples d'application	9
CHAPITRE II : LIEUX DES CARRÉS DES POLES DANS L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE DES INSTAL- LATIONS DU DEUXIEME ORDRE INTEGREES	12
1) Méthode d'optimalisation par les moindres carrés	12
2) Lieu des carrés des pôles pour une installation pseudopériodique	15
3) Lieu des carrés des pôles pour une installation apériodique	20
4) Lieu des pôles	22
5) Graduation en réponse des lieux des pôles et des lieux des carrés des pôles	23
6) Application à la détermination du correcteur optimal.	28
CHAPITRE III : LIEU DES POLES ET OPTIMALISATION DES SYSTEMES IDENTIFIES PAR LA METHODE DE STREJC	29
1) Introduction	29
2) Lieu des pôles pour les systèmes sans retard	30
3) Réponse indicielle en boucle fermée	31
4) Lieu des pôles pour les systèmes avec retard	33
5) Comparaison avec le lieu exact des pôles	35
6) Lieu des carrés des pôles dans l'optimalisation quadratique	36

CHAPITRE IV : PROPRIETES DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE.	40
1) Détermination des coefficients de l'équation caractéristique	40
2) Applications	42
3) Comparaison avec la méthode des polynômes normaux	48
4) Fonction coût	53
5) Extension aux installations de troisième et quatrième ordre sans intégration	54
6) Généralisation asymptotique à l'ordre n	56
CHAPITRE V : ETUDE DES CORRECTEURS	69
CONCLUSION	76

* . * . * . *

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electricité et d'Automatique de la Faculté des Sciences de Nancy en même temps que celui de M. AUBRUN sur la correction des systèmes, dans un esprit de coopération aussi amical que constant.

Monsieur le Professeur R. GUILLIEN nous fait l'honneur de présider la soutenance, et nous lui en exprimons notre reconnaissance.

Nous sommes très sensible au témoignage de bienveillance que nous apporte Monsieur R. CHAUSSARD en venant siéger dans notre jury avec Monsieur R. HUSSON. Nous les en remercions vivement tous les deux.

Que Monsieur le Professeur A. FRÜHLING veuille trouver ici l'expression de notre profonde gratitude pour le soutien et les conseils qu'il n'a cessé de nous prodiguer.

Madame J. FRÜHLING, B. BOHN et J. RAGOT ont apporté une bien précieuse et souriante contribution de soin et de dévouement à la mise au point de ce travail, tout au long de la réalisation duquel nous n'avons cessé d'apprécier l'ambiance sympathique et le rare esprit de camaraderie qui règnent au sein du Laboratoire, et qui nous ont bien facilité la tâche.

* * * * *

* INTRODUCTION *

* * * * *

La majorité des installations des systèmes asservis ont une fonction de transfert qui, après identification, sont

$$G(s) = \frac{a}{s(s + \frac{1}{T})}$$

ou plus généralement

$$G(s) = \frac{a}{s(s + \frac{1}{T})(s + \frac{1}{T'})} \quad (1)$$

C'est le cas par exemple de la fonction de transfert des moteurs à courant continu commandés par l'induit ou l'inducteur, en l'absence de couple de rappel à la sortie. C'est aussi le cas de certains moteurs hydrauliques [1].

Dans la première partie de ce travail, nous prenons le problème à sa base logique en essayant de représenter mathématiquement le processus. Nous appliquons des méthodes d'identification à des systèmes supposés du second ordre à réponse apériodique dont la fonction de transfert a la forme (1) sans l'intégration.

La deuxième étape conduit à assurer un fonctionnement satisfaisant au système compte tenu des contraintes imposées aux grandeurs de commande. Dans notre cas, le critère de qualité est constitué par l'extrémalisation d'un indice de performance telle que la minimisation

de l'erreur quadratique moyenne. Nous optimalisons donc par la méthode quadratique les systèmes du second ordre avec intégration, en utilisant les lieux des carrés des racines^[II]. Une extension de cette utilisation est faite, au cas de systèmes apériodiques d'ordre n ^[III] supérieur ou égal à trois, et identifiés par la méthode de Strejc.

Nous déterminons ensuite les coefficients de la fonction de transfert optimale et nous donnons les différentes applications de cette détermination. La plus intéressante de ces applications est la comparaison des correcteurs, qui, mis en série avec l'installation doivent assurer le comportement optimal du système, à ceux obtenus par la méthode des polynômes normaux^[IV]. Cette comparaison aboutit finalement à la mise en évidence de l'action de l'optimisation quadratique sur les performances du système et en particulier sur sa réponse indicielle. Enfin, l'étude du comportement asymptotique des rapports caractéristiques lorsque la contrainte imposée est peu sévère permet la détermination des coefficients de la transmittance optimale et des caractéristiques de la réponse pour des ordres quelconques.

* . * . * . *

 *
 *
 * CHAPITRE I *
 *
 *

IDENTIFICATION DE SYSTEMES APERIODIQUES
 DU DEUXIEME ORDRE PAR INTEGRATION DU SIGNAL D'ERREUR.
 COMPARAISON AVEC DES METHODES GRAPHIQUES [V]

.....

1) INTRODUCTION.

La transmittance d'une installation du second ordre s'écrit

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2} = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad \text{[VI]} \quad (1)$$

Les constantes de temps T_1 et T_2 où nous supposons par exemple $T_1 > T_2$, sont liées aux coefficients τ_1 et τ_2 par les relations

$$T_1 + T_2 = \tau_1 \quad \text{et} \quad T_1 T_2 = \tau_2^2 \quad (2)$$

qui donnent

$$T_{1,2} = \frac{\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_2^2}}{2} \quad (3)$$

Dans le cas général d'une réponse indicielle apériodique, on doit nécessairement avoir

$$\tau_2 \leq \frac{\tau_1}{2}$$

Le cas limite $\tau_2 = \frac{\tau_1}{2}$ correspond à $T_1 = T_2 = \frac{\tau_1}{2}$, et la transmittance $G(s)$ s'identifie alors avec une forme de Strejc [III] du second ordre

$$\frac{1}{(1 + \frac{s \tau_1^2}{2})}$$

La réponse indicielle du système et ses dérivées première et seconde s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right) \\ s'(t) &= \frac{1}{T_1 - T_2} \left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right) \\ s''(t) &= \frac{1}{T_1 - T_2} \left(-\frac{e^{-t/T_1}}{T_1} + \frac{e^{-t/T_2}}{T_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

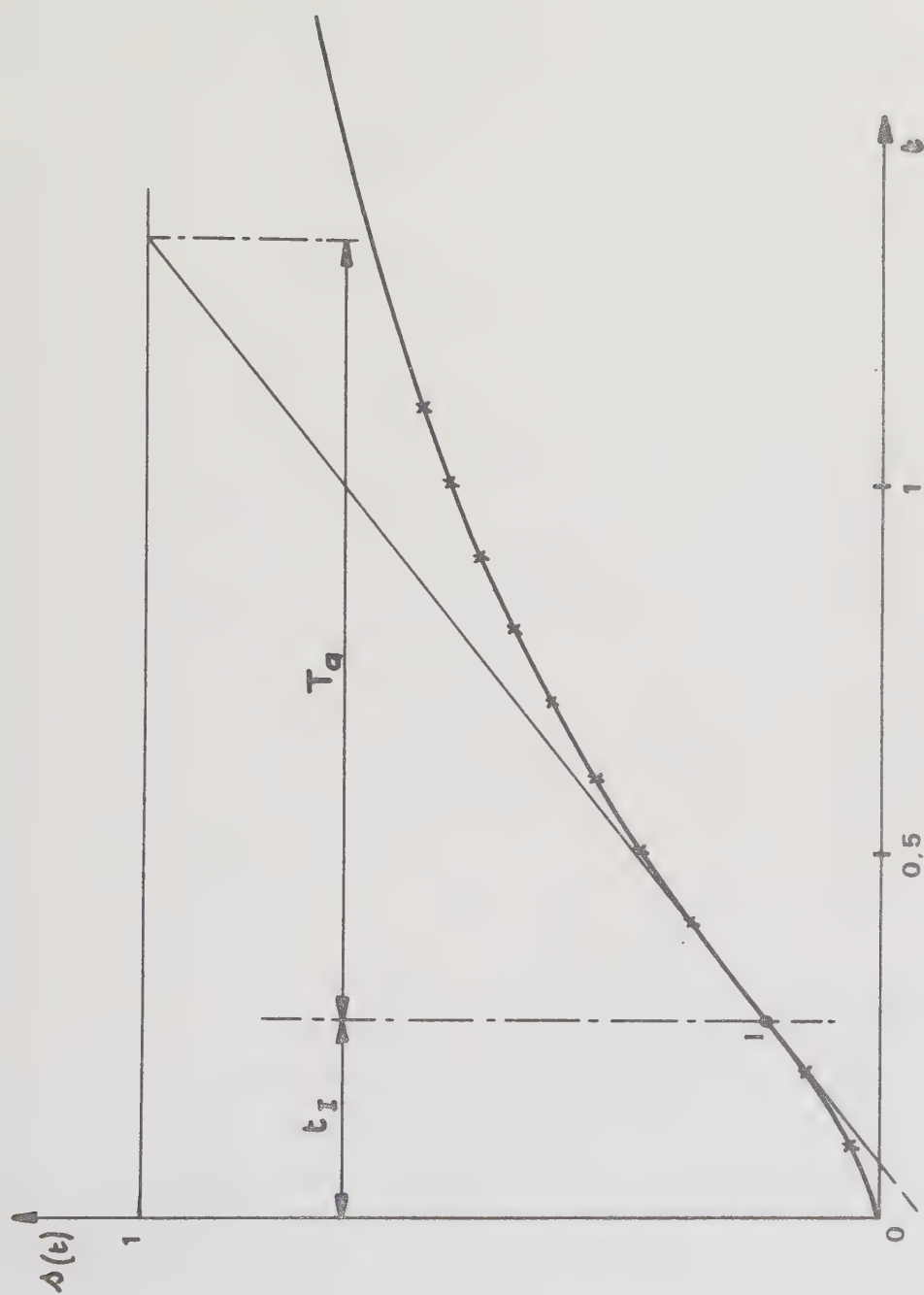
2) IDENTIFICATION A PARTIR DE LA REPOSE INDICIELLE. (figure 1)

Le point d'inflexion I de la courbe de réponse correspond à $s''(t_I) = 0$ et a pour abscisse

$$t_I = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \operatorname{Log} \frac{T_1}{T_2} = \frac{x T_1}{x - 1} \operatorname{Log} x \quad (5)$$

en posant $x = \frac{T_2}{T_1}$, où x varie de zéro à un.

Figure 1.



Réponse indicielle d'un système du second
ordre ($T_1 = 1\text{ s}$, $T_2 = 0,1\text{ s}$)

D'après les équations (1), nous obtenons

$$s'(t_I) = \frac{1}{T_1} x^{\frac{x}{1-x}} \quad (6)$$

et

$$s(t_I) = 1 - x^{\frac{x}{1-x}} (1 + x) \quad (7)$$

Nous pouvons donc tracer la courbe de variation de $s(t_I)$ en fonction de x (figure 2). Cette courbe a son ordonnée maximale égale à $s_1(t_I) = 1 - \frac{2}{e}$ pour $x = 1$, ce qui signifie que l'ordonnée du point d'inflexion de la courbe de réponse indicielle ne dépasse jamais la valeur 0,26.

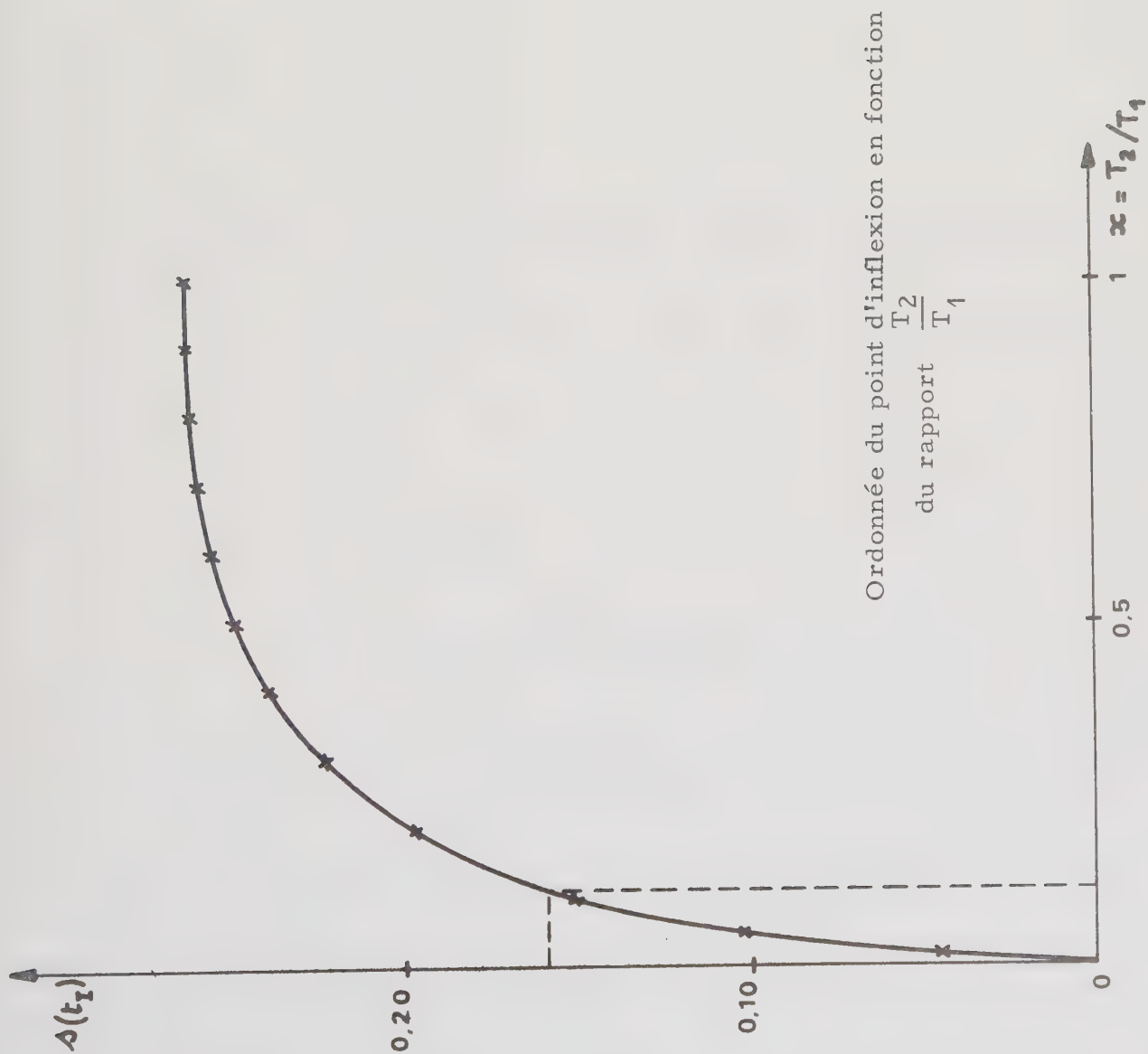
Si l'on connaît les coordonnées du point d'inflexion, on peut d'abord déduire x de la figure 2, puis les constantes de temps par leurs expressions

$$T_1 = \frac{x-1}{x \log x} t_I \quad T_2 = \frac{x-1}{\log x} t_I \quad (8)$$

En général, la détermination du point d'inflexion est peu précise, surtout pour $x > \frac{1}{3}$ par exemple, comme le montre la figure 2, puisqu'alors une faible variation de l'ordonnée $s(t_I)$ entraîne une grande variation de x . La méthode est cependant assez satisfaisante pour des constantes de temps nettement différentes. D'ailleurs, si $x \rightarrow 1$, $T_1 \neq T_2$ donne $t_I = T_1$.

Notons aussi qu'on peut introduire une condition supplémentaire déduite de la valeur de $s'(t_I)$ et qui doit être compatible avec les valeurs de x et de t_I .

Figure 2.



Cette condition s'écrit

$$\frac{T_a}{t_I} = \frac{x^2 - 1}{x \operatorname{Log} x} \quad (9)$$

où T_a est défini sur la figure 1.

Nous avons tracé les variations du rapport $\frac{T_a}{t_I}$ en fonction de x . Ce rapport reste toujours supérieur à la valeur $\frac{1}{2}$ qui correspond à $x = 1$. (figure 3).

3) IDENTIFICATION PAR DOUBLE INTEGRATION DU SIGNAL D'ERREUR.

Le signal d'erreur $\mathcal{E}(t)$ étant l'écart entre l'entrée et la sortie, nous avons

$$\mathcal{E}(t) = 1 - s(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} \begin{pmatrix} -t/T_1 & -t/T_2 \\ T_1 e & -T_2 e \end{pmatrix} \quad (10)$$

Une première intégration du signal $\mathcal{E}(t)$ donne

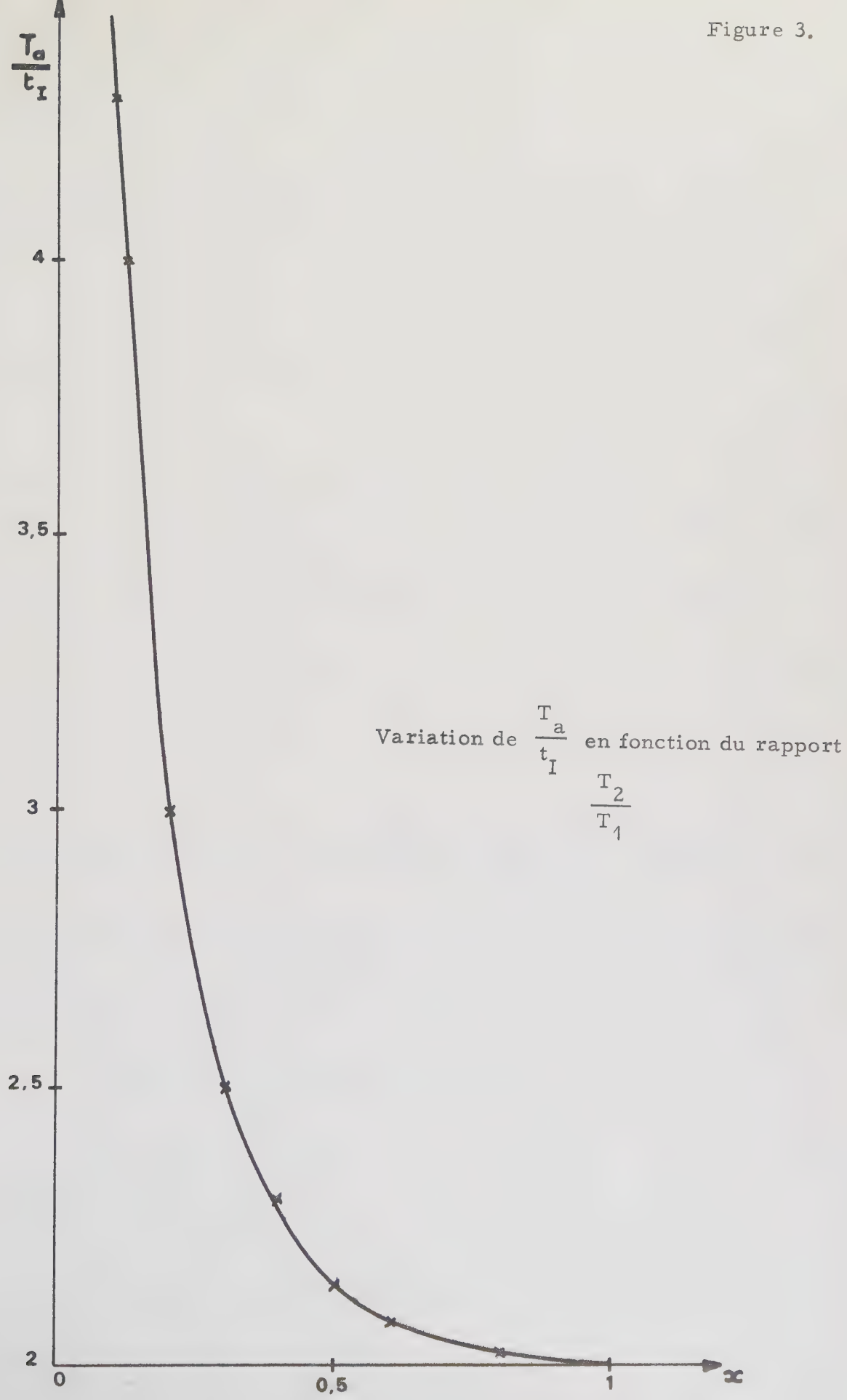
$$\gamma(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t) dt = T_1 + T_2 + \frac{1}{T_1 - T_2} \begin{pmatrix} -t/T_1 & -t/T_2 \\ -T_1^2 e & +T_2^2 e \end{pmatrix} \quad (11)$$

En intégrant de zéro à l'infini, nous obtenons

$$\int_0^\infty \mathcal{E}(t) dt = T_1 + T_2 = \tau_1 \quad (12)$$

Une seconde intégration entre zéro et l'infini de $\tau_1 - \gamma(t)$ aboutit à

Figure 3.



$$\int_0^{\infty} [\tau_1 - \gamma(t)] dt = \frac{T_1^3 - T_2^3}{T_1 - T_2} = T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 \quad (13)$$

Ces intégrales déterminent τ_1 et τ_2 , d'où T_1 et T_2 , d'après (3).

Cette méthode est d'autant plus précise que $\tau_1^2 - 4\tau_2^2$ est plus grand, c'est-à-dire que T_1 et T_2 sont plus différents.

Au contraire, si T_1 et T_2 sont assez proches l'une de l'autre (ce qu'il est possible de savoir par une détermination rapide de $x = T_1/T_2$, ou par la faible valeur de $\tau_1^2 - 4\tau_2^2$), on peut approcher la transmittance par une forme de Strejc [III]. Dans ce cas, la première intégration donnant τ_1 est suffisante, et donne pour la transmittance

$$G(s) = \frac{1}{s \tau_1^2 \left(1 + \frac{\tau_1^2}{2}\right)} \quad (14)$$

4) COMPARAISON AVEC LA METHODE TEMPORELLE D'IDENTIFICATION

Pour le cas des systèmes du 2ème ordre, la méthode précédente n'est autre, en fait, que l'application particulière de la méthode temporelle d'identification des systèmes linéaires [VII].

Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{\alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i s^i}{1 + \sum_{j=1}^n \beta_j s^j}$$

la réponse finale à un échelon unitaire étant α_0 .

Formons

$$G'(s) = G(s) - \alpha_0$$

La réponse finale de ce nouveau système à l'échelon d'ordre 2 est

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_0 \beta_1$$

les coefficients α'_i de $G'(s)$ étant de la forme

$$\alpha'_i = \alpha_i - \alpha_0 \beta_i$$

Puis avec $G''(s) = G'(s) - \alpha'_1 s$, la réponse finale à l'échelon d'accélération est

$$\alpha''_2 = \alpha'_2 - \alpha'_1 \beta_1$$

où les α''_i sont de la forme

$$\alpha''_i = \alpha'_i - \alpha'_1 \beta_i$$

et ainsi de suite.

Dans le cas d'une transmittance de numérateur constant α_0 les relations précédentes se simplifient et les réponses d'ordre 2 et 3 deviennent

$$\alpha'_1 = -\alpha_0 \beta_1 \text{ qui donne } \beta_1,$$

$$\alpha''_2 = -\alpha_0 \beta_2 - \alpha'_1 \beta_1 \text{ qui donne } \beta_2.$$

Pour le système du second ordre envisagé

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2}$$

on a $\alpha_0 = 1$, $\tau_1 = \beta_1$, $\tau_2^2 = \beta_2$.

La première réponse vérifie $\alpha_0 = 1$, la seconde donne

$$\alpha_1' = -\alpha_0 \beta_1 = -\tau_1$$

et la troisième

$$\alpha_2'' = \alpha_0 (\beta_1^2 - \beta_2) = \tau_1^2 - \tau_2^2$$

bien conformes à (12) et (13).

5) EXEMPLES D'APPLICATION.

Nous avons simulé analogiquement, suivant la figure 4, la fonction de transfert du second ordre

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s/10)}$$

Le montage de la figure 4 a pour transmittance

$$G(s) = \frac{-\frac{R'}{2R}}{\left(1 + \frac{RC}{2}s\right)(1 + R'C's)}$$

où les résistances et capacités sont choisies telles que

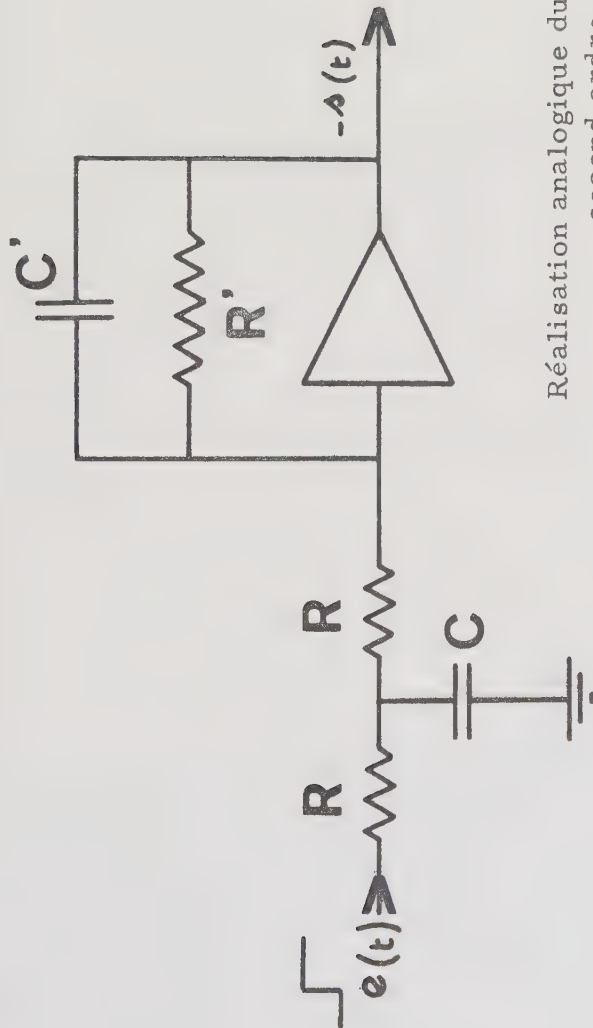
$$\frac{R'}{2R} = 1, \quad \frac{RC}{2} = 1 \quad \text{et} \quad R'C' = \frac{1}{10} \quad (\text{figure 4}).$$

La réponse indicielle obtenue figure 1 donne pour le point d'inflexion

$$t_I = 0,27$$

$$s_I = 0,16$$

Figure 4.



Réalisation analogique du système du second ordre.

et
$$\frac{T_a}{t_I} \neq 4$$

soit, d'après les figures 2 et 3 successivement

$$0,11 < x < 0,12$$

Avec $x = 0,11$, les expressions (8) donnent alors

$$T_1 \neq 0,99 \quad \text{et} \quad T_2 \neq 0,1 \text{ s}$$

La méthode des deux intégrations successives est mise en œuvre par le montage de la figure 5, dont l'usage est général. Elle donne $\tau_1 = 1,10$, $\tau_1^2 - \tau_2^2 = 1,10$, qui correspondent à $T_1 \neq 0,98$.

Bien que la valeur faible de T_2 empêche une bonne détermination, on obtient $T_2 = 0,11$.

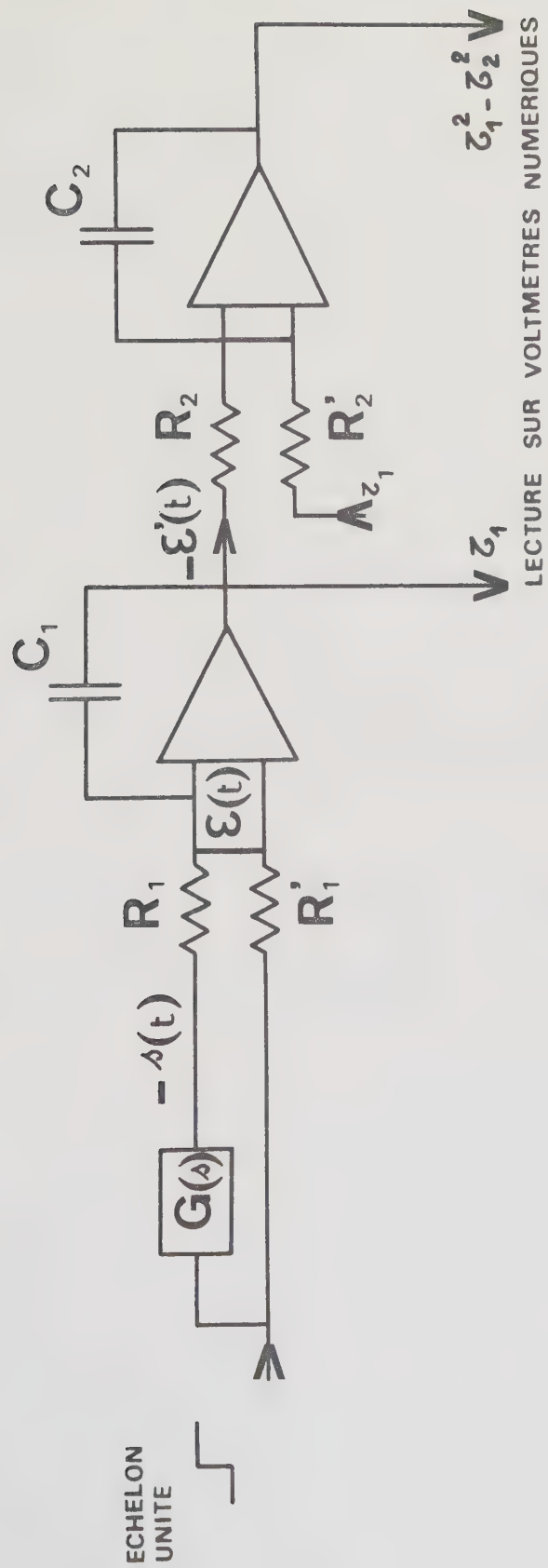
Nous avons également réalisé analogiquement la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s) \left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

La position du point d'inflexion sur la réponse indicielle correspondant à $x > \frac{1}{3}$ ne permet pas d'obtenir les constantes de temps avec une bonne précision. Mais, dans ce cas, nous pouvons identifier la transmittance avec une forme de Strejc grâce au résultat de la première intégration du signal d'erreur qui donne $\tau_1 = 1,44$, d'où

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0,72 s)^2}$$

Figure 5.



Détermination des coefficients z_1 et z_2 .

Remarquons que dans la méthode d'intégration, nous savons aussitôt que les deux constantes de temps sont proches l'une de l'autre par le fait que le résultat de la seconde intégration est très proche de $\frac{3}{4} \tau_1^2$.

L'identification d'un système par l'analyse indicielle est surtout intéressante avec des constantes de temps grandes, l'analyse fréquentielle étant, alors, malcommode.

Souvent, les systèmes se comportent comme des systèmes du deuxième ordre où les deux constantes de temps sont nettement différentes. Dans ce cas, la détermination graphique du point d'inflexion permet le calcul de T_1 et T_2 .

Cependant, la méthode par intégration a l'avantage de ne pas demander de tracé graphique, et donne par simple lecture les deux paramètres de la fonction de transfert.

* . * . * . *

CHAPITRE II

LIEUX DES CARRÉS DES POLES
DANS L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE DES
INSTALLATIONS DU DEUXIEME ORDRE INTEGREES

• • • • •

1) METHODE D'OPTIMALISATION PAR LES MOINDRES CARRÉS.

Sous sa forme la plus générale, la fonction de transfert d'une installation du deuxième ordre intégrée s'écrit

$$G(s^1) = \frac{a^1}{s^1(s^1{}^2 + 2 \sum \omega_0 s^1 + \omega_0{}^2)}$$

Avec les grandeurs sans dimensions $a = \frac{a'}{\omega_o}$, $s = \frac{s'}{\omega_o}$, cette fonction de transfert prend la forme normalisée $[\bar{V}_{III}]$

$$G(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2\zeta s + 1)} \quad (1)$$

Considérons l'installation de la figure 6 associée à un correcteur $H(s)$ et bouclée par un retour unitaire. Si $H(s)$ est un simple amplificateur de gain β , le comportement du système en boucle fermée s'étudie à l'aide des lieux d'Evans $[IX, X]$.

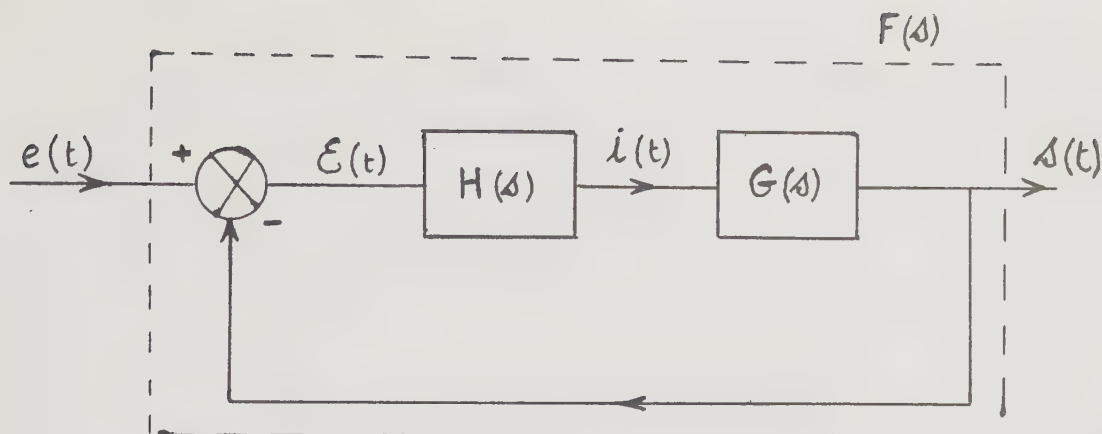


Figure 6.

Pour la détermination du correcteur $H(s)$, on utilise les deux critères suivants :

L'intégrale du carré de l'erreur $e(t) - s(t)$ pour l'entrée $e(t)$ appliquée au temps $t = 0$ doit être minimale et l'intégrale du carré de la grandeur de commande $i(t)$ doit rester dans les limites compatibles avec le bon fonctionnement de l'installation :

$$J_1 = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t)]^2 dt = \text{minimum} \quad (2)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} [i(t)]^2 dt \leq K \quad (3)$$

En appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les conditions précédentes se condensent suivant

$$J_1 + \frac{1}{\beta^2} J_2 = \text{minimum} \quad (4)$$

où $1/\beta$ est le multiplicateur de Lagrange permettant le compromis entre l'erreur et la contrainte sur le signal de commande.

Dans le cas d'une entrée en échelon, la méthode des moindres carrés donne pour la transmittance optimale du système bouclé corrigé [II]

$$F(s) = \frac{1}{Y(0) Y(s)} \quad (5)$$

avec

$$Y(s) = \left[1 + \frac{1}{\beta^2 G(s) G(-s)} \right]^+ \quad (6)$$

où l'indice $+$ désigne la prise en considération, après factorisation spectrale, des seuls facteurs de la parenthèse, ayant les pôles et zéros dans le demi-plan complexe gauche.

Avec la fonction de transfert (1), on obtient

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \left\{ a^2 \beta^2 - s^2 \left[s^4 + 2s^2(1 - 2\xi^2) + 1 \right] \right\}^+ \quad (7)$$

et

$$Y(0) = 1$$

Posons $s^2 = -S$ et désignons par Q_1, Q_2, Q_3 les racines de

$$(S - Q_1)(S - Q_2)(S - Q_3) \equiv S^3 + 2(2\xi^2 - 1)S^2 + S + a^2 \beta^2 = 0 \quad (8)$$

Dans ces conditions, avec $Q_i = -q_i^2$ où q_i est la racine carrée de Q_i à partie réelle négative, on a pour (5)

$$F(s) = \frac{a\beta}{(s-q_1)(s-q_2)(s-q_3)} = \frac{-q_1 q_2 q_3}{(s-q_1)(s-q_2)(s-q_3)} \quad (9)$$

L'équation caractéristique de (9) peut s'étudier par l'intermédiaire des racines de (8) et plus particulièrement des lieux de ces racines lorsque $a\beta$ varie, un lieu étant associé à chaque valeur de ξ . Ces lieux sont les lieux des carrés des pôles en s de la transmittance optimale $F(s)$. Nous les étudions pour l'installation primitive d'abord pseudopériodique ($0 < \xi < 1$), puis apériodique [XI].

2) LIEU DES CARRES DES POLES POUR UNE INSTALLATION PSEUDOPERIODIQUE.

a) Disposition générale du lieu (figure 7).

En mettant en évidence

$$X_0 = 1 - 2\xi^2 \quad (10)$$

avec

$$-1 < X_0 < 1$$

dont la signification apparaîtra clairement, on a pour (8)

$$S^3 - 2X_0 S^2 + S + a^2 \beta^2 = 0 \quad (11)$$

Avec les coordonnées X et Y , $S = X + jY$, cette équation donne

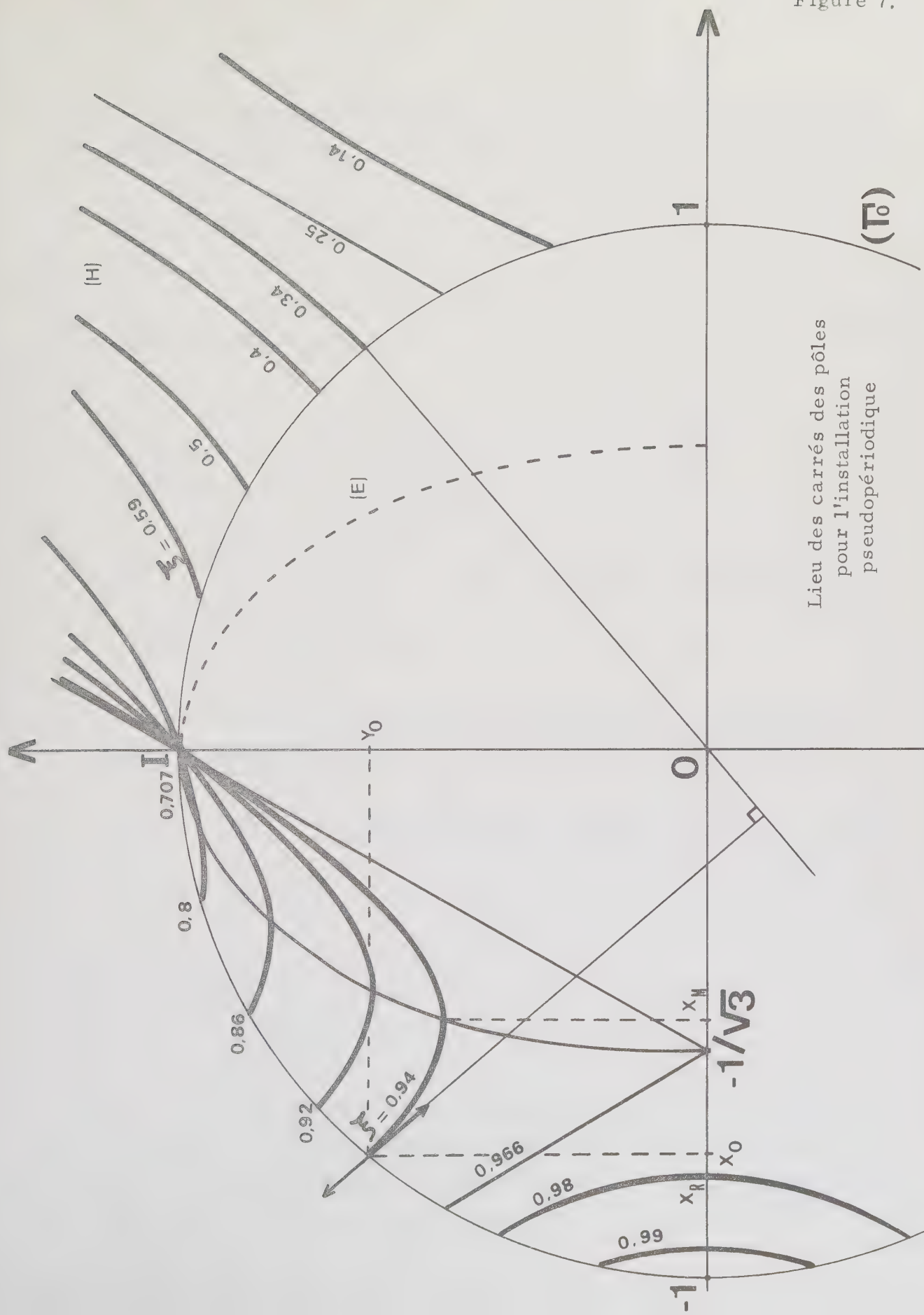
$$Y = 0 \quad (12)$$

$$3X^2 - Y^2 - 4X_0 X + 1 = 0 \quad (13)$$

et, fixant le point sur cette courbe, en fonction de $a\beta$

$$X^3 - 3XY^2 - 2X_0(X^2 - Y^2) + X + a^2 \beta^2 = 0 \quad (14)$$

Lieu des carrés des pôles
pour l'installation
pseudopériodique



L'équation (12) définit la branche du lieu constituée par l'axe réel sur lequel (14) donne la condition

$$a^2 \beta^2 = -X(X^2 - 2X_0 X + 1) \gg 0 \quad (15)$$

Le signe positif de la parenthèse pour $|X_0| < 1$ montre que seul convient le demi-axe réel négatif.

De son côté (13) donne le faisceau des hyperboles (H) symétriques par rapport à l'axe réel dont les asymptotes sont inclinées à $\pm \frac{\pi}{3}$, et d'abscisse à l'origine $\alpha = \frac{2}{3} X_0$.

Pour $X_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, l'hyperbole dégénère en ses asymptotes

$$Y = \pm \sqrt{3} \left(X - \frac{2}{3} X_0 \right)$$

Les hyperboles précédentes ne sont pas valables dans leur totalité puisque (14) impose la condition

$$a^2 \beta^2 = 2(X - X_0) \left[1 + 4X(X - X_0) \right] \gg 0 \quad (16)$$

soit

$$X \gg X_0$$

et d'après (13)

$$\frac{3X^2 - Y^2 + 1}{4X} \ll X$$

Dans le demi-plan de gauche, $X < 0$, cette condition s'écrit $X^2 + Y^2 \ll 1$ et les portions valables des hyperboles sont à l'intérieur du cercle (Γ_0) centré en O, de rayon 1. Dans le demi-plan de droite, elles sont à l'extérieur de ce cercle.

b) Points de départ.

Pour $a\beta = 0$, (11) donne

$$S = 0$$

$$S = X_0 + j Y_0$$

$$\text{où } X_0 \text{ apparaît ainsi, avec } Y_0 = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \quad (17)$$

L'origine constitue le point de départ pour le demi-axe réel négatif. Les deux autres points de départ sont sur le cercle (Γ_0) puisque $X_0^2 + Y_0^2 = 1$. Hors de l'axe réel, la condition $X \geq X_0$ impose à toutes les courbes d'être à droite de leur point de départ.

c) Intersections avec l'axe imaginaire.

Avec sur cet axe $S = j\Omega$, on a pour (11)

$$\left. \begin{aligned} \Omega(1 - \Omega^2) &= 0 \\ a^2 \beta^2 &= -2 X_0 \Omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

qui fixe l'origine d'une part ($\Omega = 0$, $a\beta = 0$), et d'autre part, pour toutes les hyperboles (H) les mêmes points I, $\Omega = \pm 1$ sur le cercle (Γ_0) avec $(a^2 \beta^2)_I = -2 X_0$ qui montre que les intersections n'existent que pour $X_0 \leq 0$, donc $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$.

d) Tangentes.

La pente pour l'hyperbole (13) est donnée par

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X - 2X_0}{Y}$$

Au point de départ (17), elle est

$$\left(\frac{dY}{dX} \right)_{X_0} = \frac{X_0}{Y_0} \quad (19)$$

de construction simple.

Au point d'intersection I sur (Γ_0)

$$\left(\frac{dY}{dX} \right)_{X=0} = -2 X_0 \quad (20)$$

Les points à tangente horizontale ont pour coordonnées

$$X_m = \frac{2 X_0}{3} = \alpha \quad (21)$$

et

$$Y_m = \pm \sqrt{1 - 4 X_0^2 / 3}$$

ce qui définit comme lieu des minimums l'ellipse (E),

$$Y_m^2 + 3 X_m^2 = 1$$

passant par les points I, symétrique par rapport aux axes, de petit axe $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Les points sur cette ellipse n'existent que si $|X_0| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le gain en ces points est donné par

$$(a^2 \beta^2)_{X_m} = - \frac{2 X_0}{3} \left(1 - \frac{8 X_0^2}{9} \right) \quad (22)$$

ce qui exige en plus $X_0 \leq 0$.

Les minimums sur les portions valables n'existent que dans le demi-plan de gauche, ce qui est évident puisque l'ellipse (E) est toujours à l'intérieur du cercle (Γ_0) .

Les points à tangente verticale sont, comme la symétrie l'exige, sur l'axe réel $Y = 0$ et n'existent que si $3X^2 - 4X_0X + 1 = 0$ a des racines en X , soit si $|X_0| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, valeur qui fait, justement par l'hyperbole dégénérée en ses asymptotes, la séparation entre les hyperboles de grand axe vertical et de grand axe horizontal.

L'abscisse du point à tangente verticale que l'on retrouve en écrivant la condition de séparation du lieu avec l'axe réel est la solution de $3X^2 - 4X_0X + 1 = 0$, et doit satisfaire la condition

$$a^2 \beta^2 = -X(X^2 - 2XX_0 + 1) > 0$$

soit encore

$$a^2 \beta^2 = -\frac{2}{3} X(1 - XX_0) > 0$$

qui impose avec $X_0 < 0$, $0 > X > \frac{1}{X_0}$.

La solution valable est

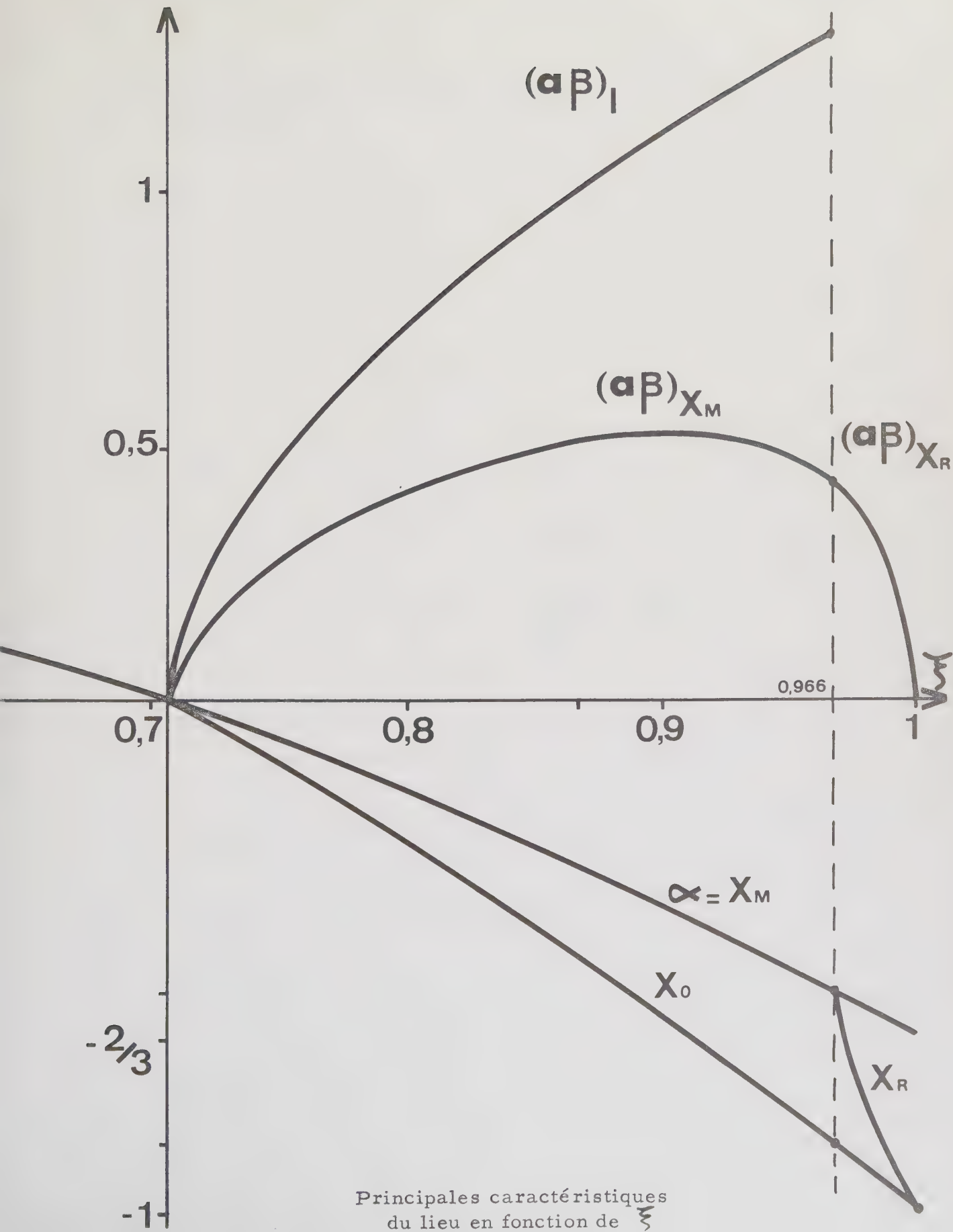
$$X_R = \frac{2}{3} \left[(X_0 - \sqrt{X_0^2 - \frac{3}{4}}) \right] \quad (23)$$

telle que $-1 < X_R < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, avec, pour le gain correspondant

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} > (a^2 \beta^2)_{X_R} = -\frac{2}{3} X_R(1 - X_0 X_R) > 0 \quad (24)$$

Les variations de toutes les grandeurs précédentes en fonction de ξ , sont représentées par les courbes de la figure 8.

Figure 8.



3) LIEU DES CARRES DES POLES POUR UNE INSTALLATION APERIODIQUE.

Si l'installation a pour fonction de transfert

$$G(s') = \frac{a'}{s'(s' + \frac{1}{T})(s' + \frac{1}{T'})}$$

on se ramène à la forme (1)

$$G(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2\xi s + 1)}$$

en posant $a = a'(TT')^{3/2}$, $s = s' \sqrt{TT'}$, avec

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{TT'} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{T}{T'}} + \sqrt{\frac{T'}{T}} \right] \quad (25)$$

ici toujours supérieur à l'unité.

Nous supposons pour fixer les idées $T > T'$.

Tous les calculs relatifs à l'optimisation restant valables, on est amené à étudier les racines de l'équation (8),

$$s^3 + 2(2\xi^2 - 1)s^2 + s + a^2 \beta^2 = 0$$

où cette fois

$$X_0 = 1 - 2\xi^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{T}{T'} + \frac{T'}{T} \right) \quad (26)$$

est inférieur à -1.

a) Disposition générale du lieu (figure 9).

Avec $S = X + jY$, le lieu des racines comporte encore l'axe réel $Y = 0$ dont, selon (15), sont exclues la partie positive, de même que, dans la partie négative, la portion comprise entre les deux zéros $X_0 \pm \sqrt{X_0^2 - 1}$.

Le lieu comporte également le faisceau d'hyperboles (H) déterminé par l'équation (13) et obéissant à la condition (16).

Puisqu'ici $|X_0| > 1$, il existe toujours des points à tangente verticale.

b) Points de départ.

Pour $a\beta = 0$, (11) donne les trois points de départ

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = X_0 + \sqrt{X_0^2 - 1} = -\frac{T'}{T} \quad (27)$$

$$S_3 = X_0 - \sqrt{X_0^2 - 1} = -\frac{T}{T'}$$

c) Intersections avec l'axe imaginaire.

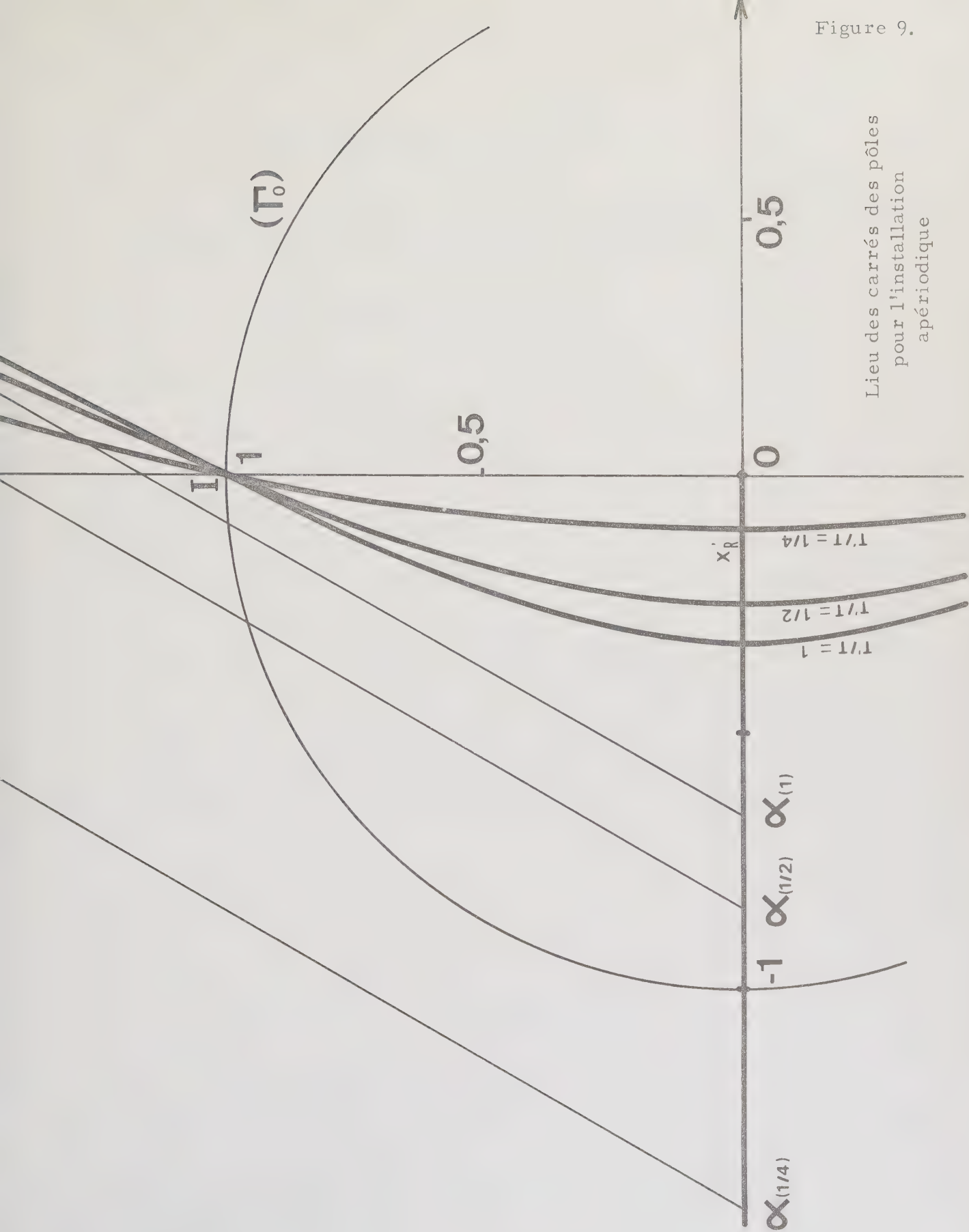
Avec $S = j\Omega$, nous retrouvons l'origine ($\Omega = 0$, $a\beta = 0$) et les points I sur le cercle (Γ_0) et correspondant au gain $(a\beta)_I = \sqrt{-2X_0}$.

d) Tangentes. Asymptotes.

Les calculs des tangentes restent les mêmes, ainsi que pour les asymptotes inclinées à $\pm \frac{\pi}{3}$ et se coupant sur l'axe réel au point d'abscisse $\alpha = \frac{2X_0}{3}$.

Figure 9.

Lieu des carrés des pôles
pour l'installation
apériodique



e) Séparation avec l'axe réel.

La dérivée de l'équation (11) doit s'annuler pour la valeur X'_R abscisse du point à tangente verticale telle que

$$3X'^2_R = 4X_o X'_R + 1 = 0$$

Cette fois, la solution valable est

$$X'_R = \frac{2}{3} (X_o + \sqrt{X_o^2 - \frac{3}{4}}) \quad (28)$$

telle que

$$-\frac{1}{3} < X'_R < 0$$

avec pour le gain correspondant

$$\frac{4}{27} > (a^2 \beta^2)_{X'_R} = -\frac{2}{3} X'_R (1 - X_o X'_R) > 0 \quad (29)$$

Les variations en fonction de $\frac{T'}{T}$ des grandeurs qui viennent d'être déterminées, sont représentées par les courbes de la figure 10.

4) LIEU DES POLES.

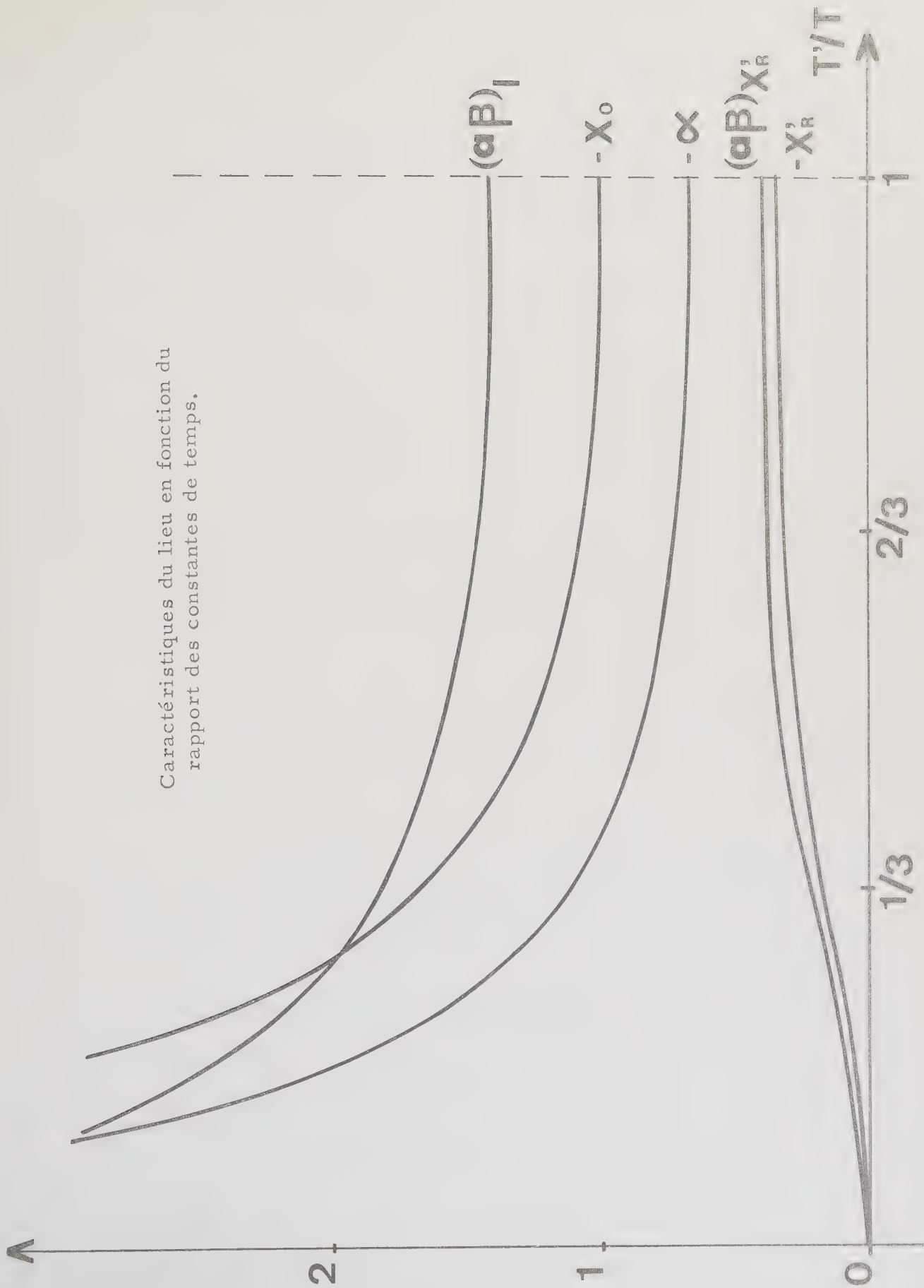
Avec

$$s^2 = (x + jy)^2 = -S = -(X + jY)$$

$$X = -(x^2 - y^2) \quad (30)$$

$$Y = -2xy$$

avec $x < 0$, l'équation (13) détermine le lieu des pôles q_1 , q_2 , q_3 du système optimisé selon



$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ 3(x^2 - y^2)^2 - 4x^2 y^2 + 4X_0(x^2 - y^2) + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

limité au demi-plan $x < 0$, avec $a\beta$ défini par (14) suivant

$$-(x^2 - y^2)^3 + 12x^2 y^2 (x^2 - y^2) - 2X_0(x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) + a^2 \beta^2 = 0 \quad (32)$$

Mis à part l'axe réel négatif qui correspond au pôle réel, q_1 par exemple, ces courbes passent le cas échéant par le point $I'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ sur le cercle (Γ_0), qui correspond justement à I dans l'opération $s = \sqrt{-S}$; ces courbes ont pour asymptotes $y = \pm \sqrt{3}x$, et se déduisent graphiquement dans le détail des lieux des carrés des pôles précédents, comme le montrent les figures 11 et 12, relatives à $\xi < 1$ et $\xi > 1$.

Nous pouvons voir comment ces lieux sont déformés vis-à-vis des lieux d'Evans correspondants avant optimisation, représentés sur les mêmes figures.

5) GRADUATIONS EN REPOSE DES LIEUX DES POLES ET DES LIEUX DES CARRES DES POLES.

a) Etablissement des graduations.

La fonction de transfert (9)

$$F(s) = \frac{-q_1 q_2 q_3}{(s - q_1)(s - q_2)(s - q_3)}$$

déterminée dans le cas de l'optimisation du paragraphe 1), est aussi

Figure 11.

Lieu d'Evans
Lieu des carrés des pôles
Lieu des pôles après optimisation

$\xi = 0.44$

$\xi = 0.92$

Γ_0

Γ_e

A

A'

A''

A'''

A''''

A'''''

B

B'

B''

B'''

B''''

B'''''

I

I'

I''

I'''

I''''

I'''''

0

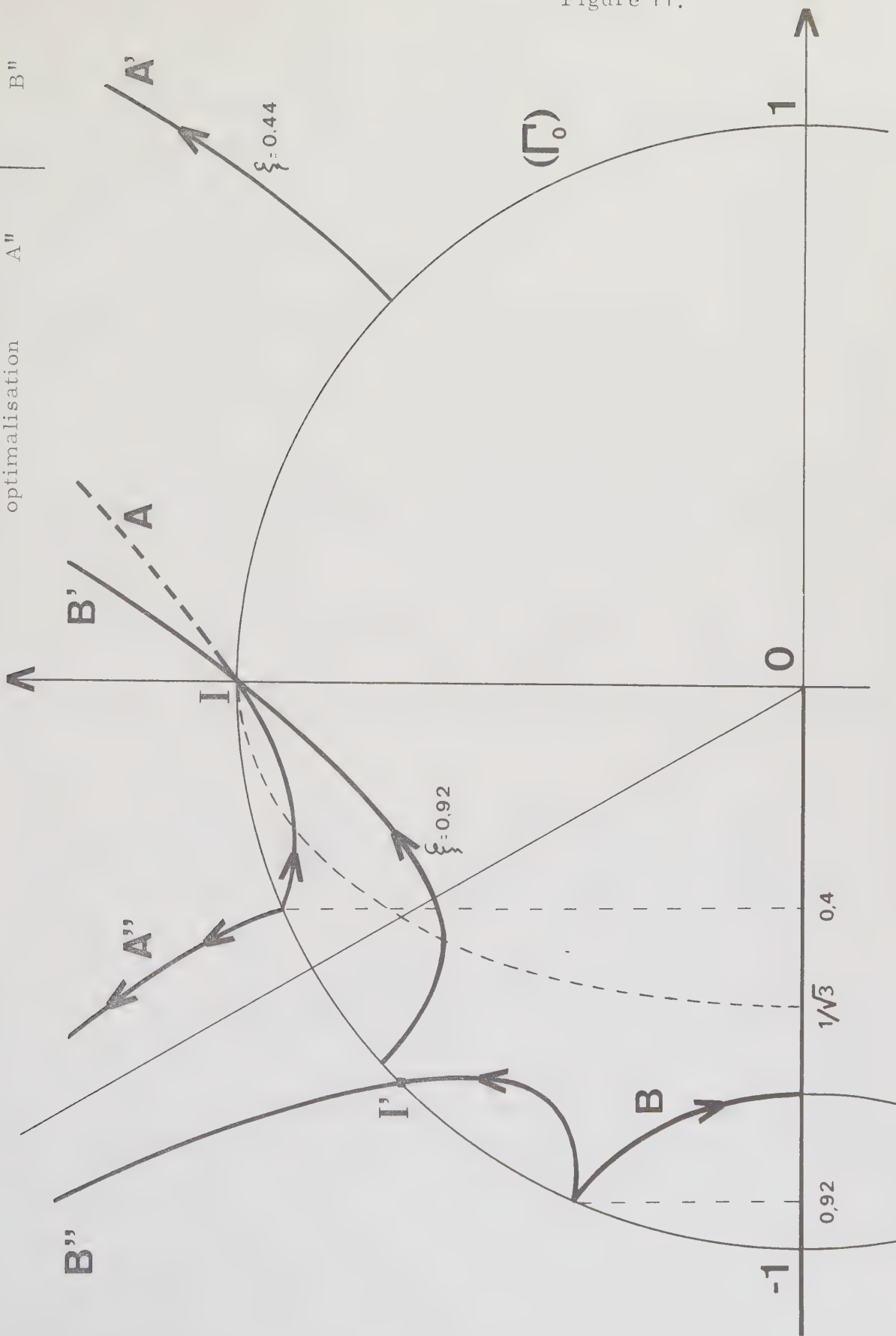
1

-1

0.92

$1/\sqrt{3}$

0.4



celle de tout système du 3ème ordre de gain unitaire, comme par exemple pour l'installation

$$G(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2\xi s + 1)}$$

bouclée, pour laquelle q_1 , q_2 , q_3 sont racines de

$$s^3 + 2\xi s^2 + s + a = 0$$

Dans tous ces cas, le lieu des pôles de $F(s)$ se gradue en temps de réponse et en dépassement pour le signal indiciel de la manière suivante.

La réponse $s(t)$ à l'échelon d'amplitude E est

$$s(t) = E \left[1 - \frac{q_2 q_3 e^{q_1 t}}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)} - \frac{q_1 q_3 e^{q_2 t}}{(q_2 - q_3)(q_2 - q_1)} - \frac{q_1 q_2 e^{q_3 t}}{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)} \right] \quad (33)$$

Lorsque la valeur absolue du pôle q_1 toujours réel, est nettement supérieure à la valeur absolue de la partie réelle de q_2 et q_3 , l'exponentielle $e^{q_1 t}$ est rapidement négligeable devant les autres et l'on a

$$s(t) = E \left[1 + \frac{q_3 e^{q_2 t} - q_2 e^{q_3 t}}{q_2 - q_3} \right] \quad (34)$$

Déterminons le taux de dépassement D , écart relatif entre la sortie et l'entrée à l'instant t_r du premier dépassement, et ce temps de réponse t_r .

L'écart relatif entre la sortie et l'entrée est

$$\frac{s(t) - E}{E} = \frac{\epsilon(t)}{E} = \frac{q_3 e^{q_2 t} - q_2 e^{q_3 t}}{q_2 - q_3} \quad (35)$$

Trois cas distincts se présentent :

- Si les racines q_2 et q_3 sont réelles, très différentes
avec $|q_3| \ll |q_2|$, nous avons

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{E} = - e^{q_3 t}$$

Dans ce cas, il n'y a pas de dépassement et le temps de réponse t_r est obtenu par

$$\left| \frac{\mathcal{E}(t)}{E} \right| \neq e^{q_3 t_r} = \frac{5}{100}$$

soit

$$t_r = \frac{3}{|q_3|} \quad (36)$$

- Si les racines q_2 et q_3 sont réelles et égales à x , on a,
sans dépassement non plus

$$\left| \frac{\mathcal{E}(t)}{E} \right| = e^{xt_r} (1 - xt_r) = \frac{5}{100}$$

soit

$$\text{Log}(1 - xt_r) = - (3 + xt_r)$$

donc

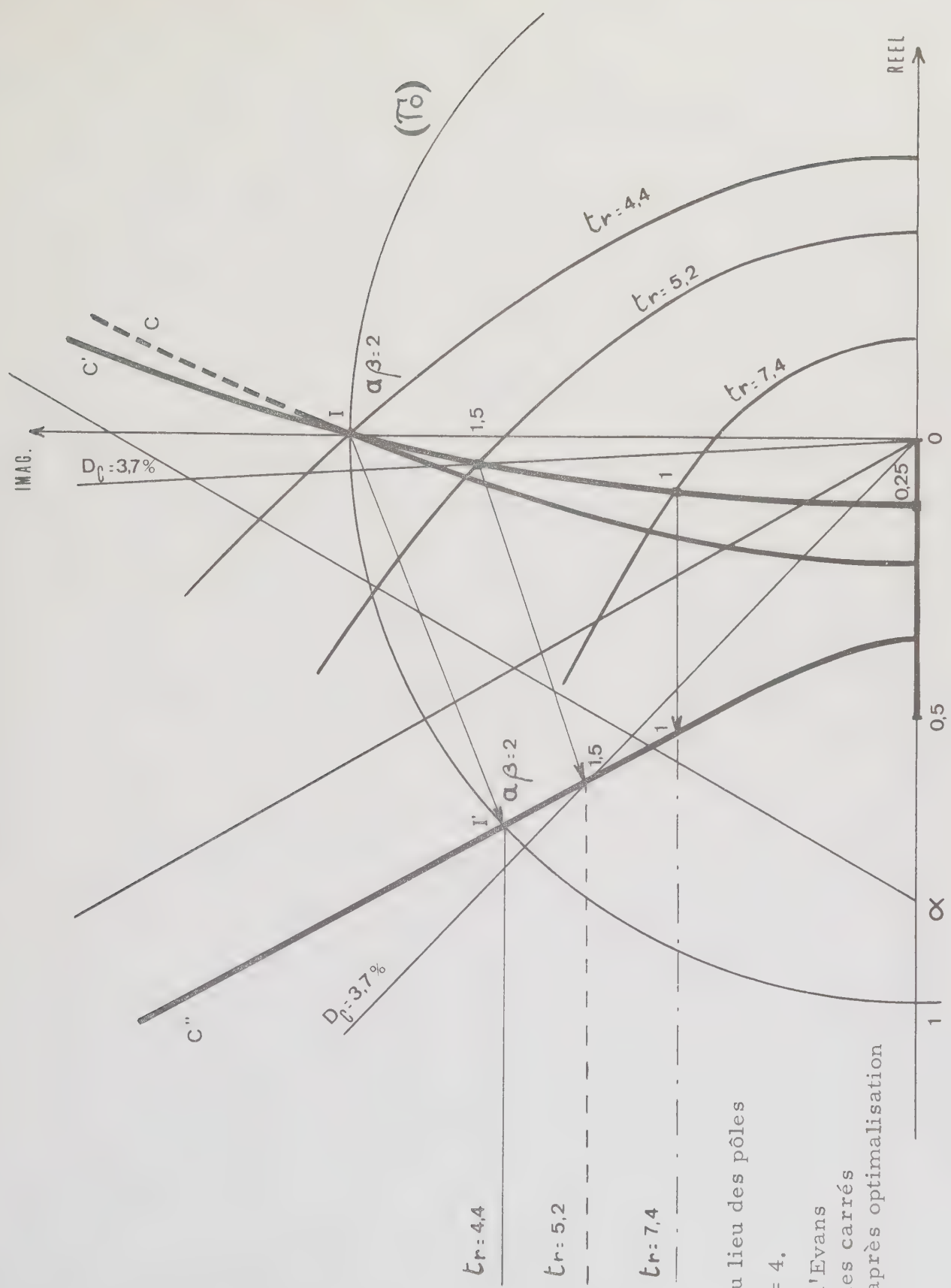
$$t_r = \frac{4,75}{x} \quad (37)$$

- Si enfin les racines q_2 et q_3 sont complexes conjuguées,

$$q_2 = x + jy \quad \text{avec } x < 0$$

$$q_3 = x - jy$$

Figure 12.



aduation du lieu des pôles

pour $\frac{T}{T'} = 4$.

C : Lieu d'Evans

C' : Lieu des carrés

C'' : Lieu après optimisation

la réponse est oscillatoire avec pour l'erreur relative

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{E} = \frac{e^{xt}}{y} (x \sin yt - y \sin xt)$$

soit encore, avec $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{E} = e^{\frac{yt}{\operatorname{tg} \varphi}} \frac{\sin(yt - \varphi)}{\sin \varphi}$$

On obtient alors le temps de réponse par la première annulation de la dérivée de $\mathcal{E}(t)$ par rapport au temps

$$\frac{e^{\frac{yt}{\operatorname{tg} \varphi}}}{\sin^2 \varphi} \cdot \sin yt = 0$$

dont la solution valable est

$$t_r = \frac{\pi}{y} \quad (38)$$

qui correspond au taux de dépassement

$$D = \frac{\mathcal{E}(t_r)}{E} = e^{\frac{\pi}{\operatorname{tg} \varphi}} \quad (39)$$

Le plan des racines $x \pm jy$ est ainsi, selon (38) et (39), simplement gradué en temps de réponse et en dépassement suivant les horizontales y d'une part, et les rayons vecteurs $\operatorname{tg} \varphi$ d'autre part (figure 12).

Les relations de graduation (38) et (39) se transcrivent immédiatement par les formules (30) dans le plan X, Y des carrés des pôles - à considérer dans le seul cas de l'optimisation-et donnent

$$Y^2 = \frac{4\pi^2}{t_r^2} \left(\frac{\pi^2}{t_r^2} - X \right) \quad (40)$$

$$Y = \frac{2\pi \text{Log } D}{(\text{Log } D)^2 - \pi^2} X \quad (41)$$

Les courbes $t_r = \text{constante}$ et $D = \text{constante}$ sont ainsi les paraboles et les droites représentées sur la figure 12.

b) Vérification expérimentale.

On a tracé les lieux des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée et le lieu des carrés des pôles de la transmittance optimale correspondant à la fonction de transfert de l'installation

$$G(s') = \frac{625}{s'(s' + 2,5)(s' + 10)} \quad , \text{ soit } \frac{T}{T'} = 4 \text{ ou } \xi = 1,25$$

en cascade avec le correcteur proportionnel β ou celui plus général $H(s)$.

Ces lieux sont gradués en temps de réponse et en dépassement.

Les courbes de la figure 13, qui représentent en trait mixte les variations, en fonction du gain, du temps de réponse et du taux de dépassement déduits de la graduation des lieux d'Evans, concordent de manière satisfaisante avec les courbes obtenues par simulation analogique puisque les écarts constatés n'excèdent pas la valeur 7% atteinte pour la limite de stabilité du système en boucle fermée.(figure 13).

On a comparé de même sur la figure 14 les résultats déduits des lieux gradués des carrés des pôles avec les résultats obtenus analogiquement et numériquement. Les résultats sont d'autant meilleurs

que β est plus faible, puisqu'alors on se trouve bien dans les conditions de validité de la graduation qui exige que l'une des racines demeure plus grande en valeur absolue que les deux autres.

En effet, si β augmente, donc si 2φ tend vers $\frac{\pi}{3}$, les racines q_1 , q_2 , q_3 tendent à avoir même module. Cependant les résultats obtenus d'après la graduation sont encore très acceptables pour $2\varphi = 80^\circ$.

6) APPLICATION A LA DETERMINATION DU CORRECTEUR OPTIMAL.

Les lieux ainsi déterminés dans l'optimalisation selon la contrainte et l'amortissement de l'installation, disposés dans le plan gradué en dépassement et temps de réponse, permettent de fixer directement suivant les propriétés désirées la fonction de transfert du système par q_1 , q_2 , q_3 . On en déduit immédiatement la fonction de transfert du correcteur nécessaire.

* . * . * . *

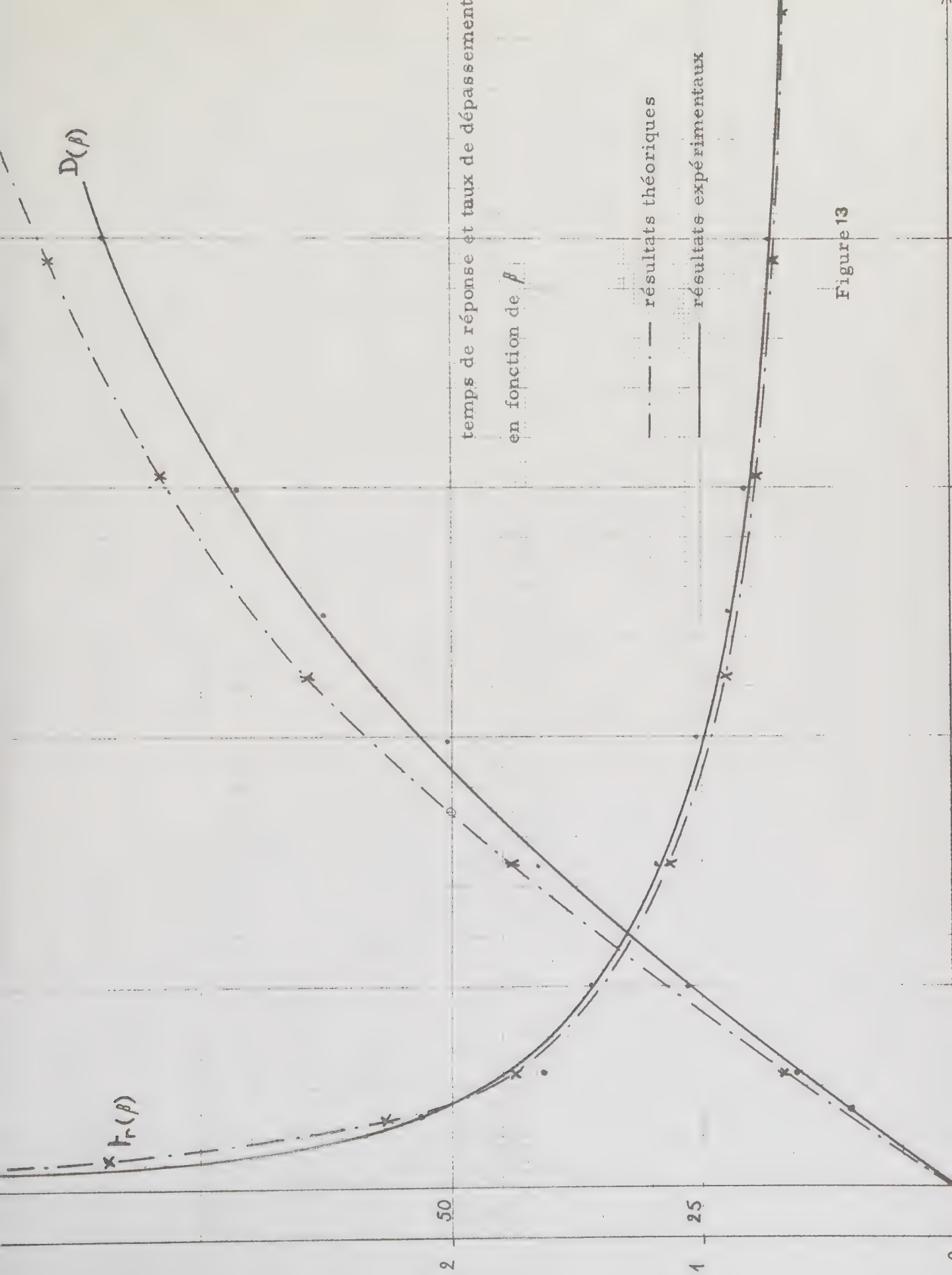
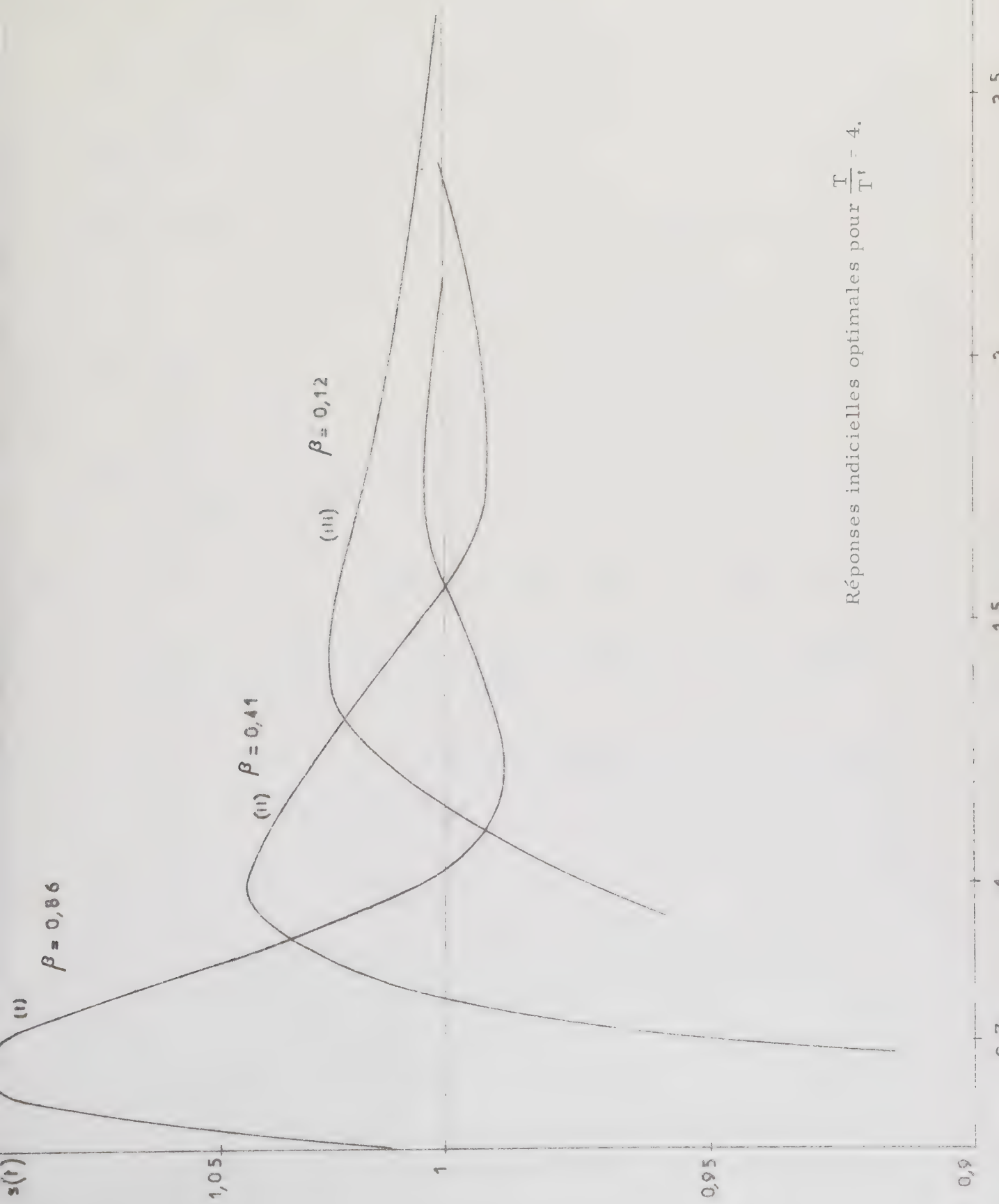


Figure 13



Réponses indicielles optimales pour $\frac{T}{T^*} = 4$.

$$G(s) = \frac{a e^{-\frac{\tau s}{T}}}{(s+1)^n} \quad (3)$$

soit en restant à des fréquences assez basses

$$G(s) = \frac{a_1}{(s + \frac{T}{\tau})(s+1)^n} \quad (4)$$

$$\text{où } a_1 = a \frac{T}{\tau} .$$

Ce cas est aussi celui de l'installation où avec l'ensemble des n constantes de temps voisines de T , apparaît la constante nettement plus petite τ .

En boucle fermée et en série avec le proportionnel β , cette installation donne la transmittance

$$F(s) = \frac{a_1 \beta}{(s + \frac{T}{\tau})(s+1)^n + a_1 \beta} \quad (5)$$

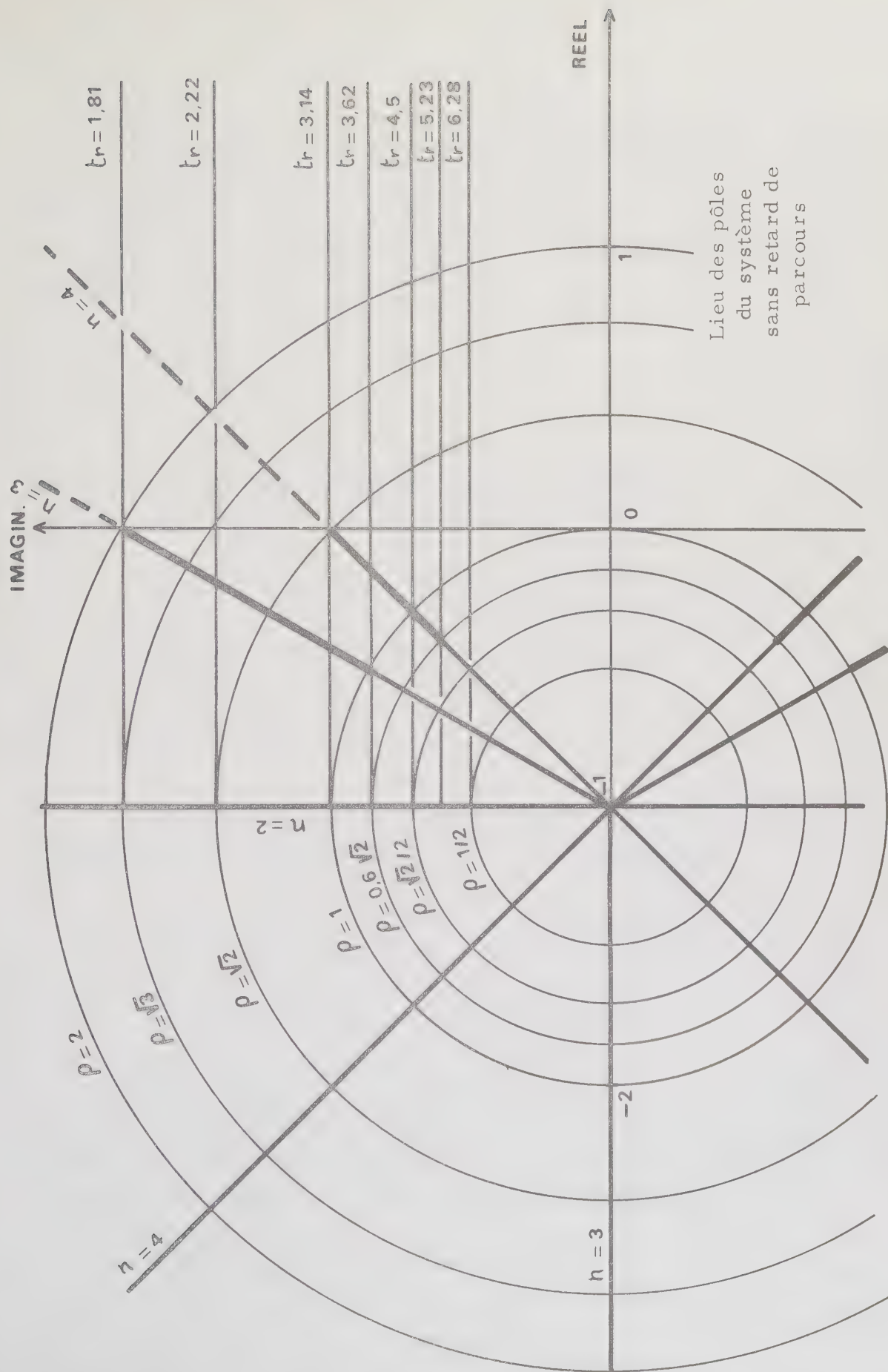
2) LIEU DES POLES POUR LES SYSTEMES SANS RETARD.

Les n pôles de la fonction de transfert (2) sont

$$s_k = \rho e^{j(2k-1)\frac{\pi}{n}} \quad (6)$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt[n]{a\beta} \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Le lieu des pôles lorsque β varie est constitué de n demi-droites issues du point $A [-1, 0]$, de direction $(2k-1)\frac{\pi}{n}$. La graduation du lieu en $a\beta$ est donnée par les cercles $a\beta = \text{constante}$ centrés en A (figure 15).



Remarque : L'approximation de la forme (1) ne permet pas de décrire le régime apériodique qui peut cependant exister en boucle fermée, puisque les pôles donnés par (6) ne sont jamais tous réels. Si n est pair, aucun de ces pôles n'est réel, et si n est impair, le seul pôle réel est obtenu pour $k = \frac{n+1}{2}$

$$\frac{s_{n+1}}{2} = -\rho - 1$$

3) REPONSES INDICIELLES EN BOUCLE FERMEE.

Avec $s_k = x_k + jy_k$, la relation (6) donne

$$x_k = \rho \cos(2k-1) \frac{\pi}{n} - 1 = x_{n+1-k} \quad (8)$$

$$y_k = \rho \sin(2k-1) \frac{\pi}{n} = -y_{n+1-k}$$

Les deux couples de pôles conjugués les plus proches de l'axe imaginaire sont obtenus pour $k = 1$ et 2 , ce qui donne

$$x_1 = \rho \cos \frac{\pi}{n} - 1 \quad (9)$$

$$x_2 = \rho \cos \frac{3\pi}{n} - 1$$

Le couple de pôles $x_1 \pm jy_1$ est le mode oscillatoire dominant du système si $|x_2| \gg |x_1|$ ($|x_2| > 4|x_1|$ par exemple, pour fixer les idées). Si cette condition est réalisée, le temps de réponse réduit pour une entrée en échelon et le taux de dépassement D sont [XII]

$$\begin{aligned} t_r &\simeq \frac{\pi}{y_1} \\ D &\simeq e^{-\frac{\pi x_1}{y_1}} \end{aligned} \quad (10)$$

qui permettent de graduer le lieu des pôles en temps de réponse et en dépassement.

La condition de mode dominant d'une part et celle de stabilité du système d'autre part imposent

$$\frac{3}{\cos \frac{\pi}{n} (7 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{n})} \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \quad (11)$$

d'où l'on déduit

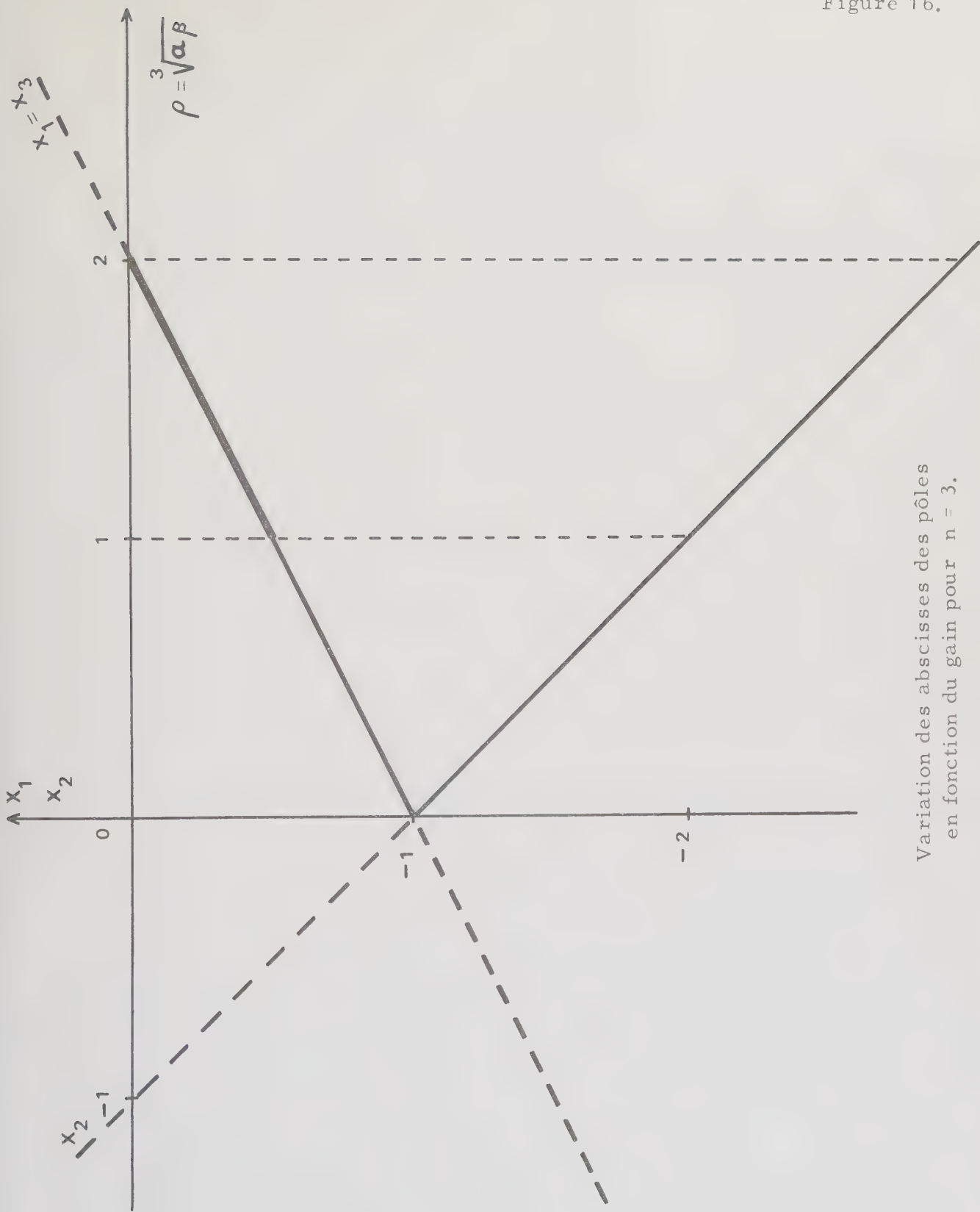
$\frac{-4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{3 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \leq x_1 < 0$	$\frac{\pi (3 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n})}{3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \gg t_r > \frac{\pi}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \quad (12)$
$\frac{\pi (3 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n})}{3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \gg t_r > \frac{\pi}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$	
$e^{-\frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{n}} \leq D < 1$	

Les figures 16 et 17 représentent respectivement pour $n = 3$ et $n = 4$, les variations de x_1 et x_2 en fonction de ρ . Les domaines où la graduation (10) est satisfaisante sont fixés selon (11)-(12) qui fournissent alors

$\rho = \sqrt[3]{a\beta}$	$n = 3$
$1 \leq \rho < 2$	
$-1/2 \leq x_1 < 0$	
$3,62 \gg t_r > 1,81$	
$0,16 \leq D < 1$	

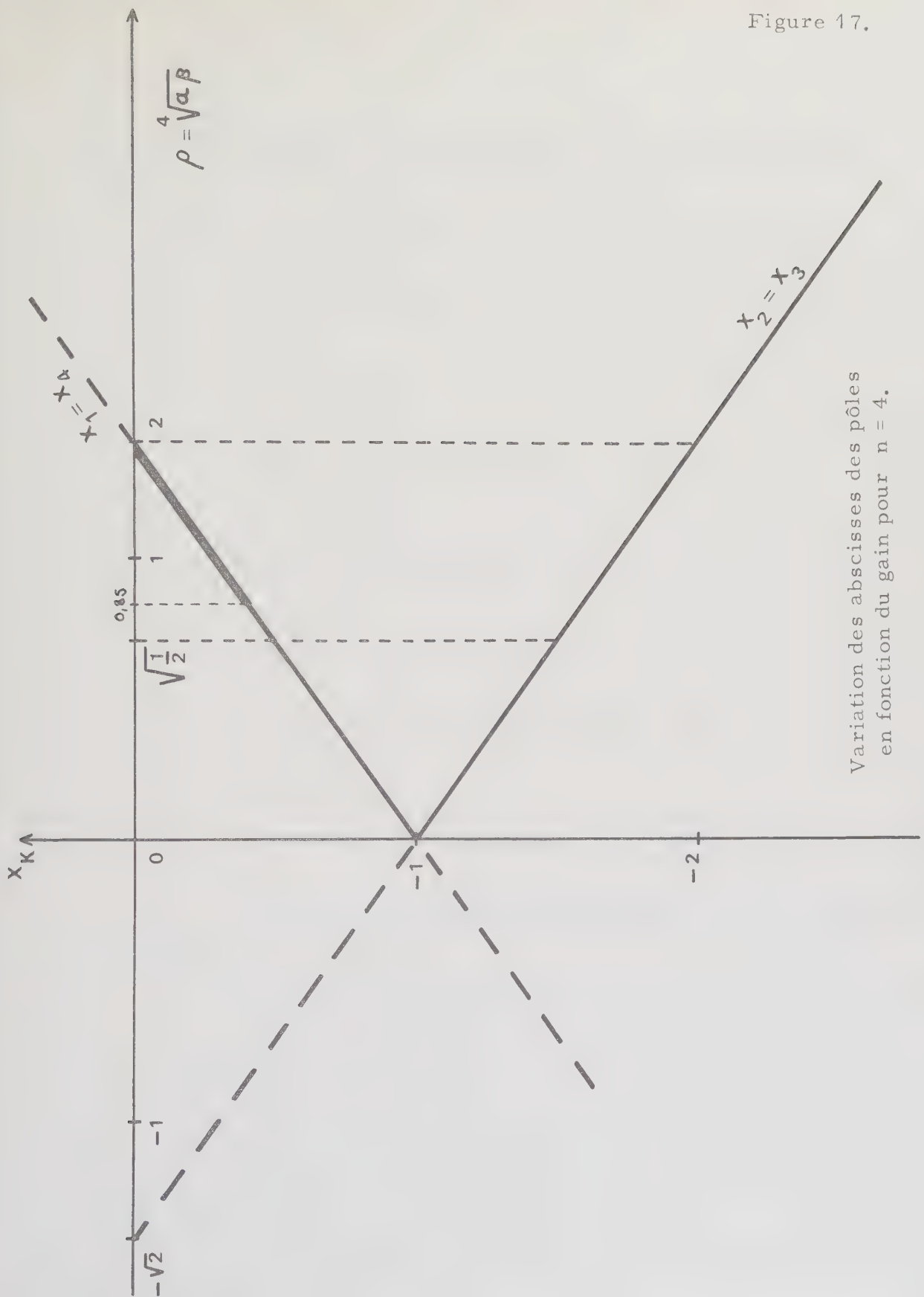
$n = 4$	$\rho = \sqrt[4]{a\beta}$
$0,85 \leq \rho < 2$	
$-0,4 \leq x_1 < 0$	
$5,23 \gg t_r > 3,14$	
$0,12 \leq D < 1$	

Figure 16.



Variation des abscisses des pôles
en fonction du gain pour $n = 3$.

Figure 17.



Variation des abscisses des pôles
en fonction du gain pour $n = 4$.

4) LIEU DES POLES POUR LES SYSTEMES AVEC RETARD.

L'équation caractéristique du système (5) est

$$(s + 1)^n \left(s + \frac{T}{\tau}\right) = -a_1 \beta \quad (13)$$

Points de départ du lieu.

Pour $a_1 \beta = 0$, (13) donne les racines réelles :

$s = -1$ point de départ d'ordre n ,

$s = -\frac{T}{\tau}$ point de départ situé loin à gauche de l'axe imaginaire.

Directions asymptotiques.

Le degré de l'équation (13) étant $n + 1$, il y a $n + 1$ asymptotes inclinées à $\frac{\pi(1 + 2\lambda)}{n + 1}$.

Si n est pair, le demi-axe réel négatif est l'une des asymptotes.

Toutes les asymptotes se coupent sur l'axe réel au point d'abscisse

$$\alpha = \frac{-(n + \frac{T}{\tau})}{n + 1} > -\frac{T}{\tau}$$

Portions d'axe réel.

Les points du lieu, sur l'axe réel, sont tels que le nombre de pôles de $G(s)$ situés à leur droite est impair.

Si n est pair, la portion du lieu sur l'axe réel est située à gauche de $-\frac{T}{\tau}$.

Si n est impair, la portion du lieu sur l'axe réel est comprise entre les valeurs $-\frac{T}{\tau}$ et -1 .

Séparations du lieu avec l'axe réel.

Les séparations du lieu avec l'axe réel sont obtenues en dérivant (13) par rapport à s

$$n(s+1)^{n-1} \left(s + \frac{T}{\tau}\right) + (s+1)^n = 0$$

Le point de départ -1 est donc un point de séparation avec l'axe réel d'ordre $n-1$.

L'autre point de séparation est

$$s_0 = - \frac{n \frac{T}{\tau} + 1}{n+1}$$

tel que

$$-1 > \alpha > s_0 > -\frac{T}{\tau}$$

Ce point n'existe donc que si la portion de l'axe réel $\left[-1, -\frac{T}{\tau}\right]$ existe, c'est-à-dire si n est impair. Ce résultat se retrouve d'ailleurs en étudiant le signe du produit $(s+1)^n \left(s + \frac{T}{\tau}\right)$ qui doit toujours être négatif.

$$\text{Au point } s_0, \text{ le gain est } (a\beta)_{s_0} = \frac{n\left(1 - \frac{T}{\tau}\right)^2}{n+1}.$$

Intersections avec l'axe imaginaire.

Avec sur cet axe $s = j\omega$, les intersections sont $s_i = j\omega_i$ telles que

$$(j\omega_i + 1)^n \left(j\omega_i + \frac{T}{\tau}\right) = -a_1\beta$$

où la solution $\omega_i = 0$ n'est pas valable puisqu'elle donne

$$a_1\beta < 0$$

Pour $n = 2$

$$\omega_i = \pm \sqrt{1 + 2 \frac{T}{\tau}} \quad \text{et} \quad a_1 \beta_i = 2 \left(\frac{T}{\tau} + 1 \right)^2$$

et pour $n = 3$

$$\omega_i = \pm \sqrt{\frac{1 + 3 \frac{T}{\tau}}{3 + \frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad a_1 \beta_i = \frac{8 \left(\frac{T}{\tau} + 1 \right)^3}{\left(3 + \frac{T}{\tau} \right)^2}$$

Ces valeurs $a_1 \beta_i$ définissent les valeurs limites du gain pour que les systèmes soient stables.

Remarque : Quel que soit $a\beta$ il existe toujours des pôles complexes puisque le point -1 est à la fois point de départ et point de séparation avec l'axe. L'introduction d'un retard de parcours dans la forme (4) ne permet pas plus qu'avec la forme (1) l'étude du régime apériodique qui peut exister réellement en boucle fermée.

5) COMPARAISON AVEC LE LIEU EXACT DES POLES.

La fonction de transfert approchée (5) donne l'équation caractéristique (13)

$$(s + 1)^n \left(s + \frac{T}{\tau} \right) = - a_1 \beta = - a \frac{T}{\tau} \beta \quad (13)$$

Elle constitue une approximation de la fonction de transfert réelle du système

$$F(s) = \frac{a}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_{n+1})}$$

pour laquelle l'équation caractéristique réduite comparable à (13) est

$$\left(s + \frac{T}{T_1} \right) \left(s + \frac{T}{T_2} \right) \dots \left(s + \frac{T}{T_{n+1}} \right) = \frac{- a T^{n+1} \beta}{T_1 T_2 \dots T_{n+1}} \quad (14)$$

Le lieu correspondant des racines est très semblable à celui qui vient d'être déterminé comme le montre la figure 18 dans le cas $n = 2$, avec $T_1 = 1$, $T_2 = 5$, $T_3 = 10$, et pour $T = 7,35$ avec $\tau = 0,85$ [III]. La différence essentielle, comme on l'a déjà remarqué, concerne le régime apériodique qui existe réellement entre les points $-\frac{T}{T_2} = -1,47$ et $-\frac{T}{T_3} = -0,74$ et dont l'existence n'est pas décrite par la forme approchée (13).

6) LIEU DES CARRES DES POLES DANS LE CAS DE L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE.

a) Système sans retard.

La méthode des moindres carrés appliquée à l'installation identifiée sous la forme (1) donne avec la relation (II-6)

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \left[a^2 \beta^2 + (1 - s^2)^n \right]^+ \quad (15)$$

Nous avons ainsi à calculer les racines à parties réelles négatives de l'équation

$$a^2 \beta^2 + (1 - s^2)^n = 0$$

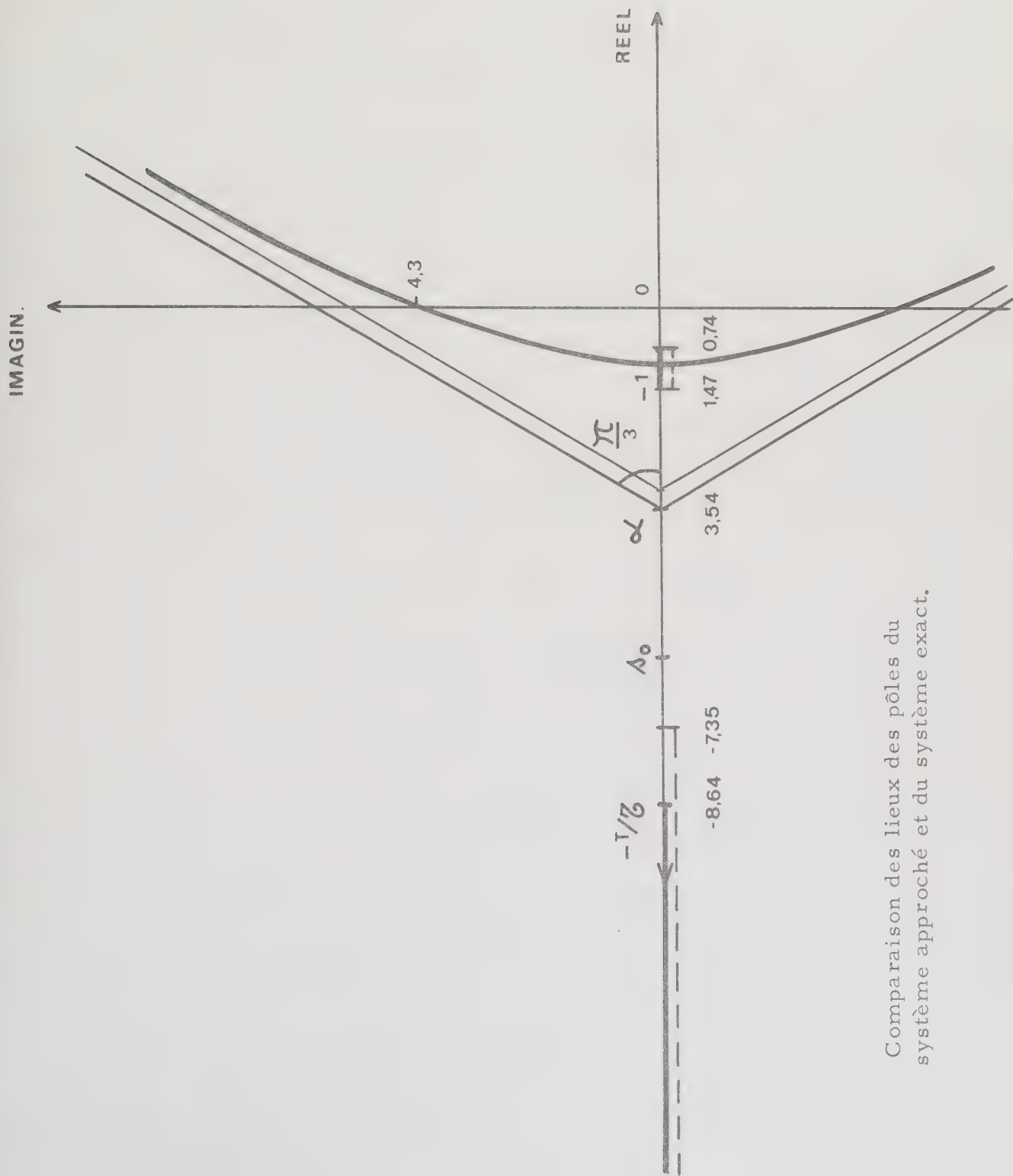
soit, avec $s^2 = -S$

$$a^2 \beta^2 + (1 + S)^n \equiv \prod_{k=1}^{k=n} (S - S_k) = 0 \quad (16)$$

Dans ces conditions, avec $S_k = -s_k^2$ où s_k est la racine carrée à partie réelle négative de S_k , on a pour (15)

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \prod_{k=1}^{k=n} (s - s_k) \quad (17)$$

Figure 18.



Comparaison des lieux des pôles du système approché et du système exact.

donc, d'après (II-5) , la transmittance optimale

$$F(s) = \frac{a^2 \beta^2}{\prod_{k=1}^{k=n} (s - s_k)} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \beta^2}} \quad (18)$$

L'équation caractéristique de (18) s'étudie par l'intermédiaire du lieu des racines de (16) qui sont

$$s_k = \rho^2 e^{j(2k-1)\frac{\pi}{n}} - 1 \quad (19)$$

avec

$$\rho^2 = \sqrt[n]{a^2 \beta^2}$$

Comme au paragraphe 2, le lieu, lorsque ρ^2 varie, est formé des n demi-droites issues du point $A \left[-1, 0 \right]$ et de pente $\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{n}$. La graduation en β est fixée par les cercles $\rho^2 = \text{constante}$ centrés en A .

En posant $s_k = X_k + j Y_k$, nous obtenons

$$X_k = \rho^2 \cos(2k-1)\frac{\pi}{n} - 1 = X_{n+1-k}$$

$$Y_k = \rho^2 \sin(2k-1)\frac{\pi}{n} = -Y_{n+1-k}$$

A s_k correspond le pôle $s_k = x_k + jy_k$ où x_k est négatif, avec

$$x_k^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{X_k^2 + Y_k^2} - X_k) = x_{n+1-k}^2$$

$$y_k^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{X_k^2 + Y_k^2} + X_k) = y_{n+1-k}^2$$

On en déduit en particulier

$$x_k^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + 1} - \rho^2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + 1 \right] \quad (20)$$

Les courbes $x_k^2 = f(\rho^2)$ passent toutes par le point $[0, 1]$, elles ont une asymptote oblique

$$x^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos(2k-1) \frac{\pi}{n}) (\rho^2 + 1)$$

et un minimum

$$x_m^2 = \sin^2(2k-1) \frac{\pi}{n}$$

pour $\rho_m^2 = 2 \cos(2k-1) \frac{\pi}{n}$ si $\cos(2k-1) \frac{\pi}{n} > 0$.

Enfin leur pente à l'origine est $-\cos(2k-1) \frac{\pi}{n}$.

La comparaison de ces courbes pour $k = 1$, (ou $n-1$), et pour $k = 2$, permet en particulier de déterminer dans quel domaine de $a\beta$ le premier de ces modes est éventuellement dominant.

Les figures 19 et 20 représentent les courbes $x_k^2(\rho^2)$ pour $n = 3$ et $n = 4$.

b) Système avec retard ou avec constante de temps supplémentaire.

Pour l'installation $G(s) = \frac{a e^{-\frac{\tau s}{T}}}{(s+1)^n}$, les calculs précédents

donnent les mêmes résultats puisque seul y intervient le produit $G(s) G(-s)$ [IV].

La fonction de transfert optimisée est donc la même sans ou avec retard, l'optimisation supprimant en particulier ce dernier par l'introduction de $e^{-\frac{\tau s}{T}}$ au numérateur du correcteur.

Cette exponentielle peut se comparer au terme de dérivation $\frac{\tau}{T} (s + \frac{T}{\tau})$ qui s'introduit également dans le cas de l'installation avec constante de temps supplémentaire

$$G(s) = \frac{a_1}{(s + \frac{T}{\tau}) (s+1)^n}$$

Figure 19.

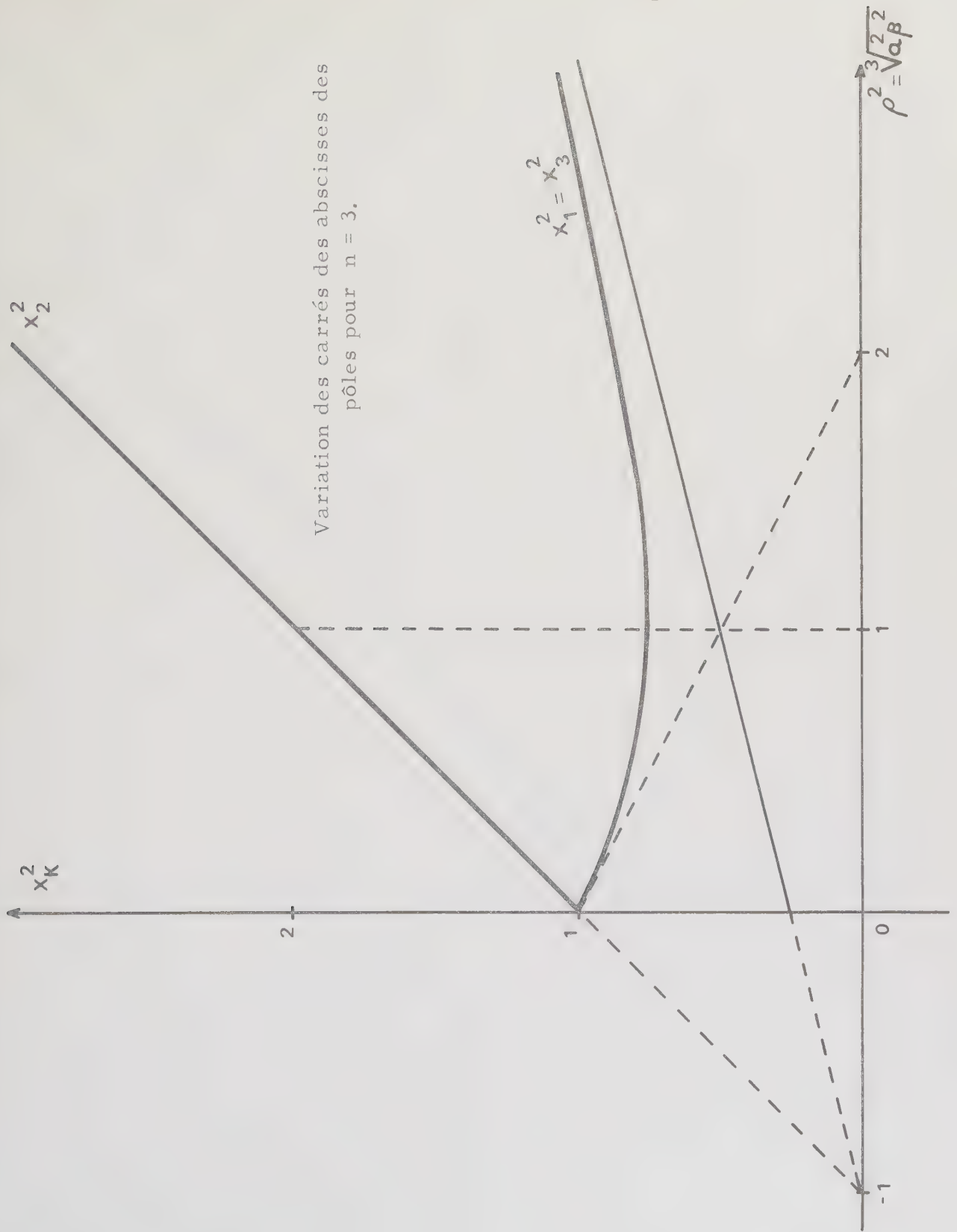
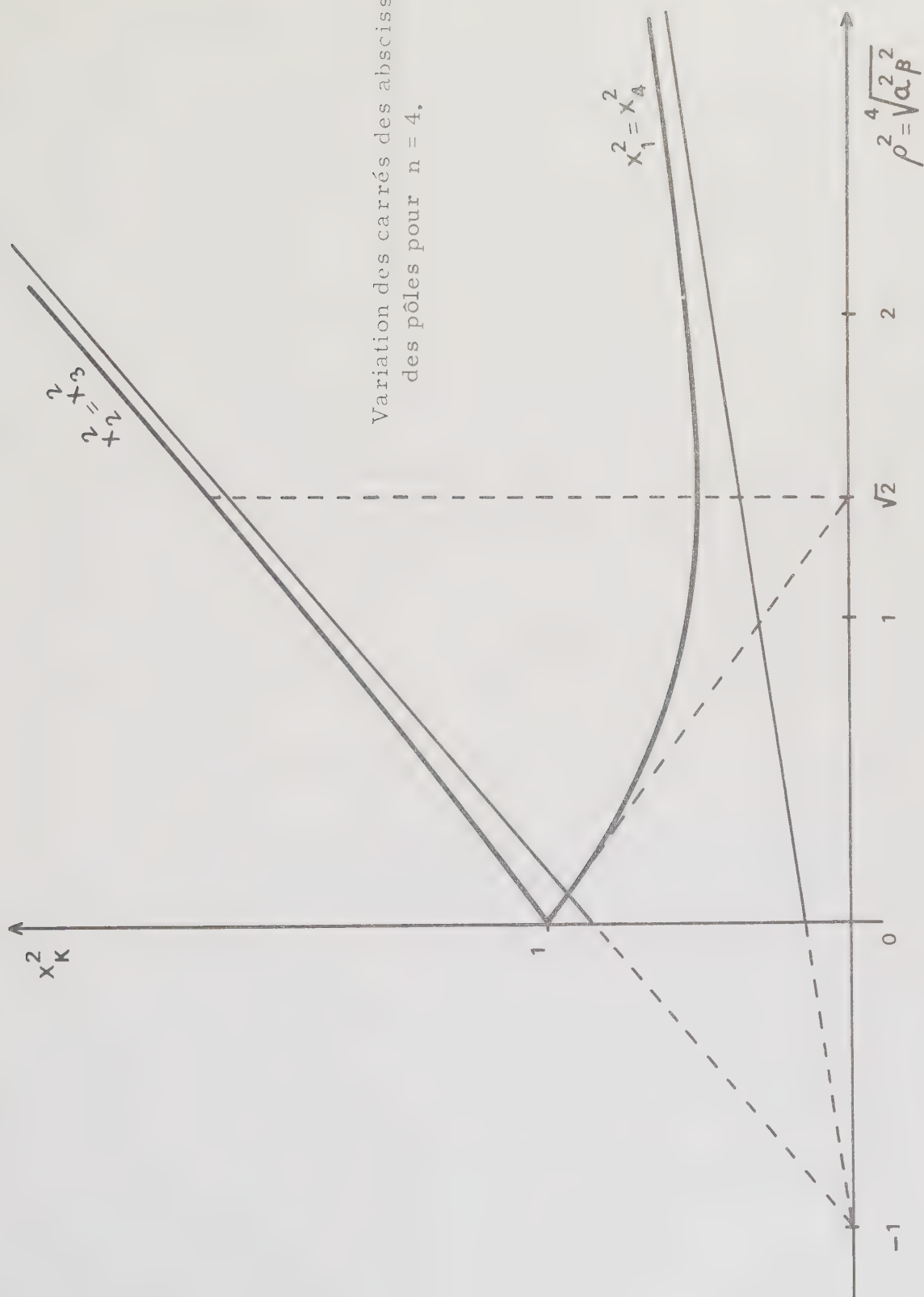


Figure 20.



En effet, on a alors

$$Y(s) = \frac{1}{a_1 \beta} \left[a_1^2 \beta^2 + \left(\frac{T^2}{\tau^2} - s^2 \right) (1 - s^2)^n \right]^+$$

qui conduit au lieu des racines en $S = -s^2$ de l'équation

$$a_1^2 \beta^2 + \left(\frac{T^2}{\tau^2} + S \right) (1 + S)^n = 0$$

Ce lieu est identique au lieu des racines en s de l'équation (13) où $a_1 \beta$ et $\frac{T}{\tau}$ deviennent respectivement $a_1^2 \beta^2$ et $\frac{T^2}{\tau^2}$ et où n'intervient plus de condition de stabilité. Il donne les solutions S_k dont les racines carrées s_k à parties réelles négatives définissent la fonction de transfert optimale

$$F(s) = \frac{a_1^2 \beta^2}{\prod_{k=1}^{n+1} (s - s_k)} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 \beta^2 + \frac{T^2}{\tau^2}}}$$

et le correcteur correspondant qui contient le facteur $s + \frac{T}{\tau}$.

Nous pourrions effectuer les calculs précédents et étudier les lieux des racines en approchant $e^{-\frac{\tau s}{T}}$ avec plus de précision par

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\tau s}{NT}\right)^N}$$

* . * . * . *

CHAPITRE IV

PROPRIETES DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE

Nous avons établi au chapitre II l'expression de la transmittance optimale correspondant à l'installation $G(s)$ en retour bouclé

$$F(s) = \frac{a\beta}{(s-q_1)(s-q_2)(s-q_3)} = \frac{a\beta}{s^2 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

dont les pôles q_1, q_2, q_3 sont les racines à partie réelle négative de l'équation

$$s^6 + 2X_0 s^4 + s^2 - a^2 \beta^2 = 0 \quad (1)$$

Dans ce chapitre, nous déterminons directement les coefficients d_0, d_1, d_2 dont l'utilisation est souvent plus commode que celle des pôles q_1, q_2, q_3 .

1.) DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE.

Les coefficients de l'équation caractéristique du système optimal

$$s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0 \quad (2)$$

sont donnés par (1) suivant

$$\left. \begin{aligned} d_2^2 &= (q_1 + q_2 + q_3)^2 = 2(d_1 - X_o) \\ d_1^2 &= (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3)^2 = 1 + 2 d_o d_2 \\ d_o &= -q_1 q_2 q_3 = a\beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Les coefficients d_2 et d_1 sont réels, positifs, fonctions de d_o , définis par

$$d_2^4 + 4 X_o d_2^2 - 8 d_o d_2 + 4(X_o^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

$$d_1^4 - 2d_1^2 - 8d_o^2 d_1 + 8 X_o d_o^2 + 1 = 0 \quad (5)$$

avec, d'après (3)

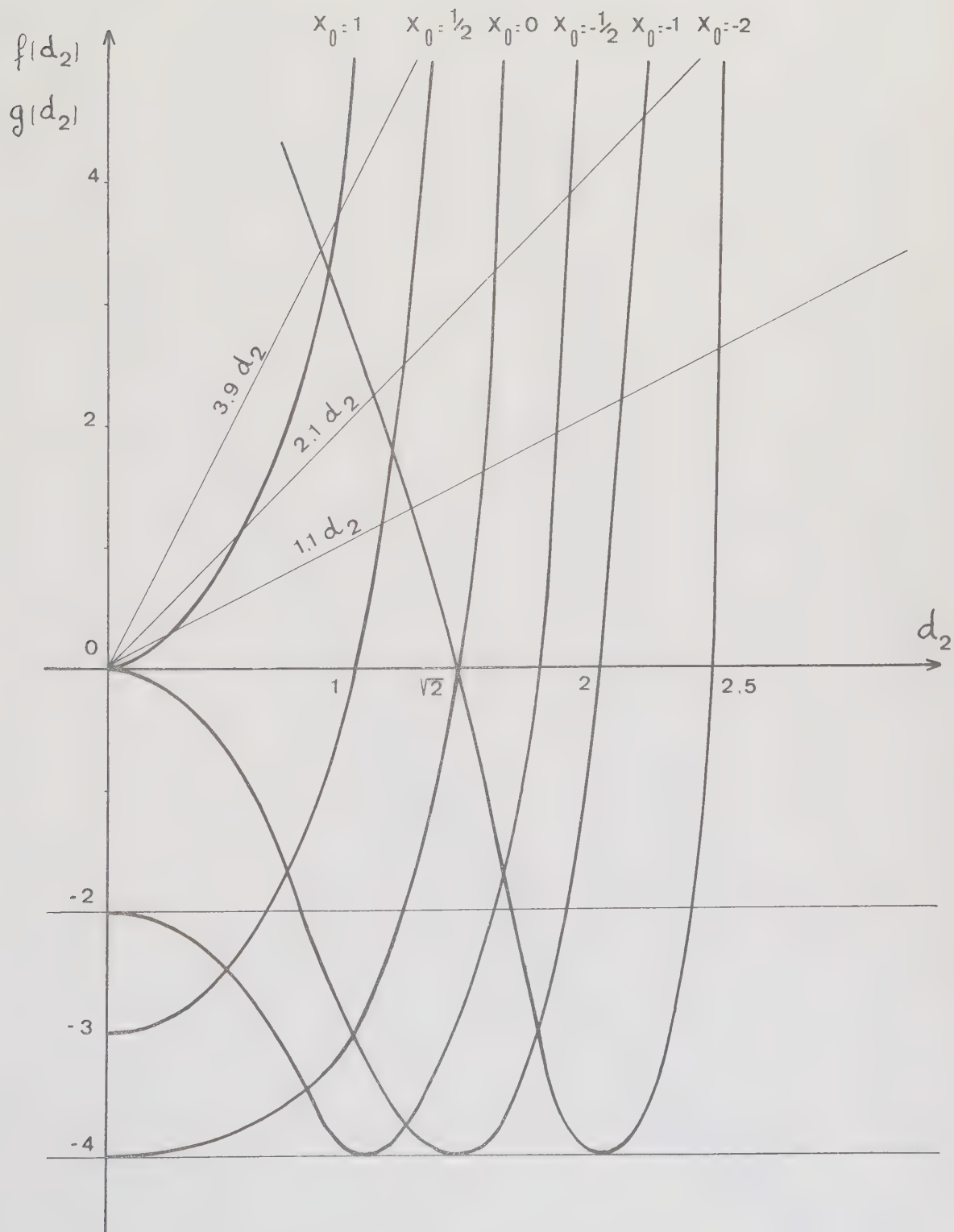
$$\begin{aligned} d_1 &\geq 1 \\ d_2 &\geq \sqrt{2(1 - X_o)} = 2\xi \end{aligned}$$

L'absence du terme de troisième degré dans (4) et (5) permet une détermination simple de d_1 et d_2 .

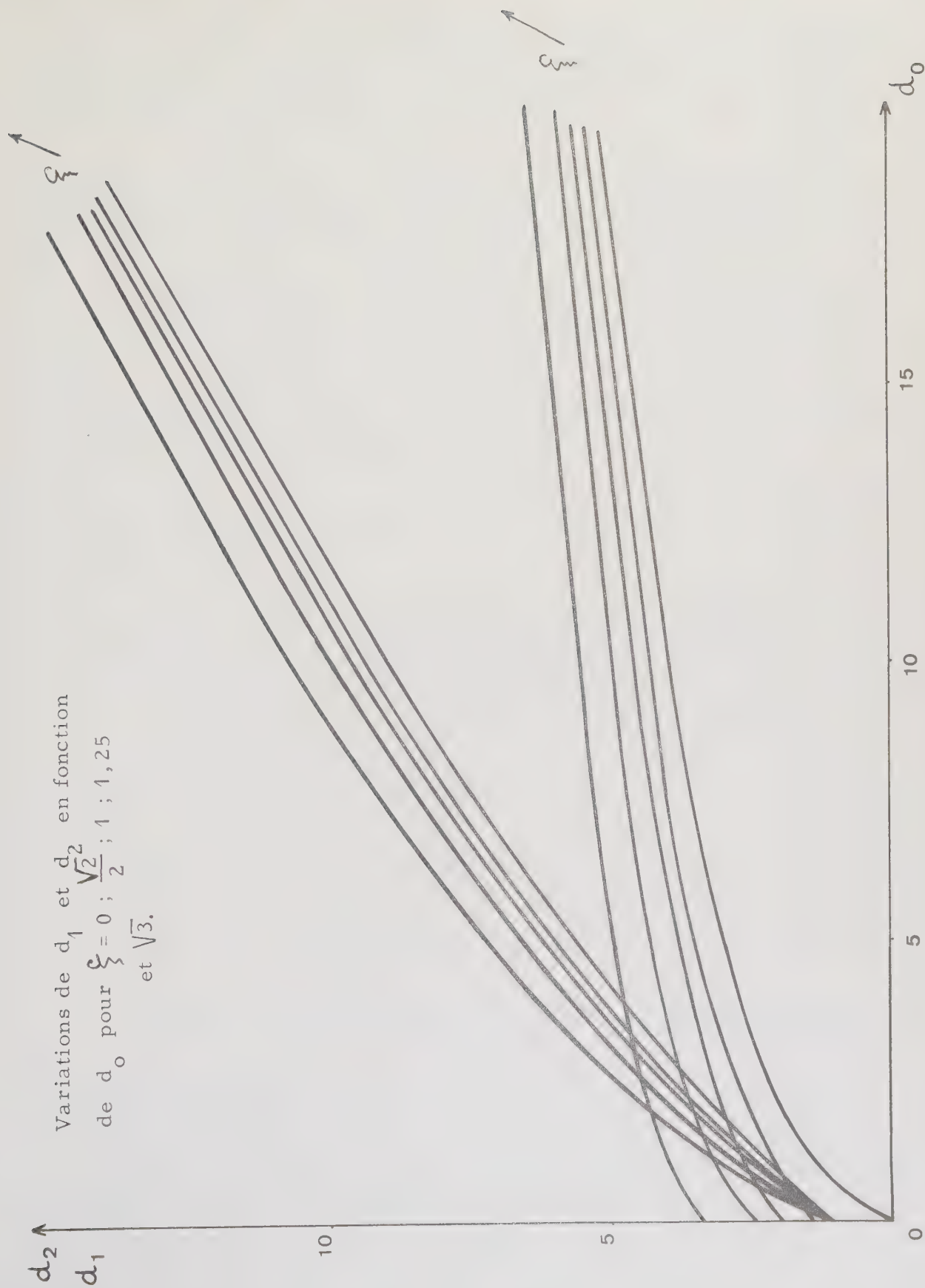
Une solution graphique de l'équation (4), plus rapide que pour (5), donne d_2 , d'où

$$d_1 = \frac{d_2^2 + 2 X_o}{2}$$

Cette solution est fournie par l'intersection des courbes $f(d_2) = d_2^4 + 4 X_o d_2^2 + 4(X_o^2 - 1)$ paramétrées en X_o avec les droites $g(d_2) = 8 d_o d_2$ issues de l'origine (figure 21). Pour respecter la condition $d_2 \geq 2\xi$, il suffit de construire la branche positive la plus à droite de $f(d_2)$ qui part justement de l'axe des abscisses pour $d_2 = 2\xi$.



Détermination des coefficients d_2



Sur la figure 22 sont tracées ainsi deux familles de courbes représentant les variations de d_2 et d_1 en fonction de d_0 , et paramétrées par le facteur d'amortissement ξ .

Exemple : pour la valeur $\xi = 1,25$ ou $X_0 = -2,125$ correspondant à un système apériodique dont le rapport des constantes de temps est $\frac{T}{T'} = 4$, avec $d_0 = 2,50$, on obtient $d_1 = 4,30$ et $d_2 = 3,60$. Sur le lieu correspondant des carrés des racines (figure 9) pour les mêmes valeurs de d_0 et de $\frac{T}{T'}$, on lit $q_2^2 + q_3^2 = -0,14$, $+q_1^2 = -4,40$, soit $q_1 = -2,10$, $q_2 = -0,73 + 0,82j$ et $q_3 = -0,73 - 0,82j$, qui donnent $d_1 = 4,27$ et $d_2 = 3,56$.

2) APPLICATIONS.

a) Optimisation quadratique pour une entrée en échelon.

La transmittance optimale du système est

$$F(s) = \frac{d_0}{s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (6)$$

Le correcteur correspondant est

$$H(s) = \frac{d_0}{a} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{s^2 + d_2 s + d_1}$$

Les variations de son gain $\frac{d_0}{ad_1}$ sont données par les courbes

$d_1 = h(d_0)$ de la figure 22.

Si le correcteur est disposé dans la boucle de retour (figure 23), sa fonction de transfert est alors celle d'un PDD² :

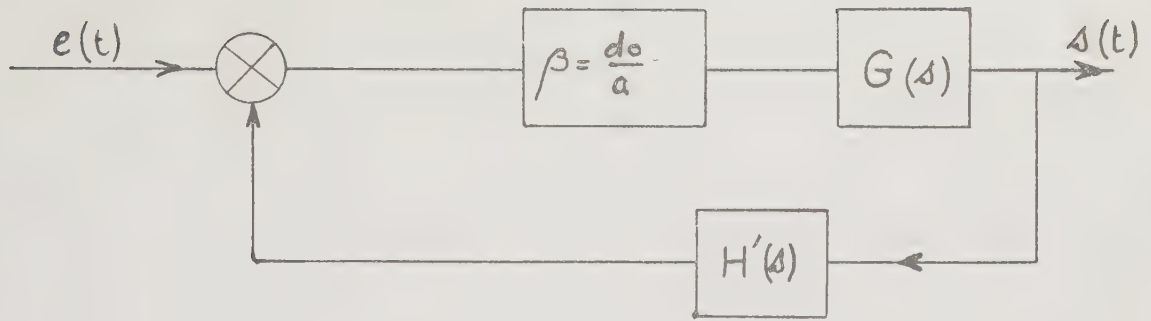


Figure 23.

$$H'(s) = \frac{d_2 - 2\xi}{d_0} s^2 + \frac{d_1 - 1}{d_0} s + 1 = \frac{d_2 - 2\xi}{d_0} s^2 + \frac{d_2^2 - 4\xi^2}{2d_0} s + 1$$

Si en deuxième variante on adopte la disposition de la figure 24,

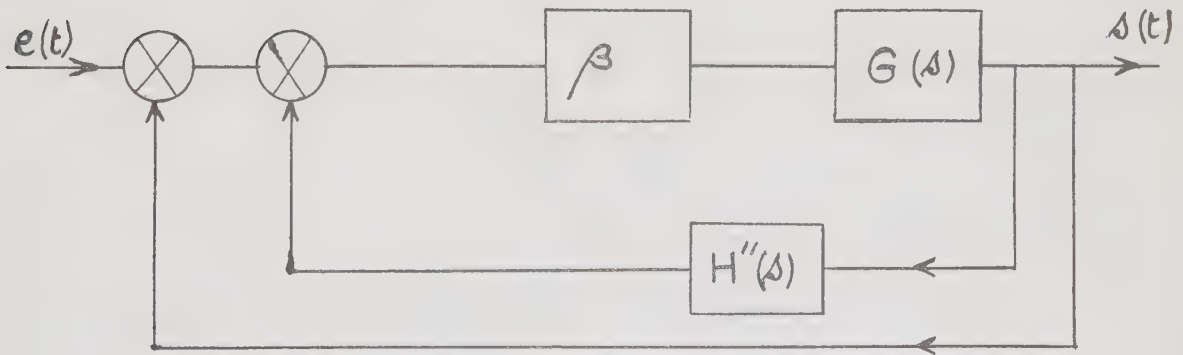


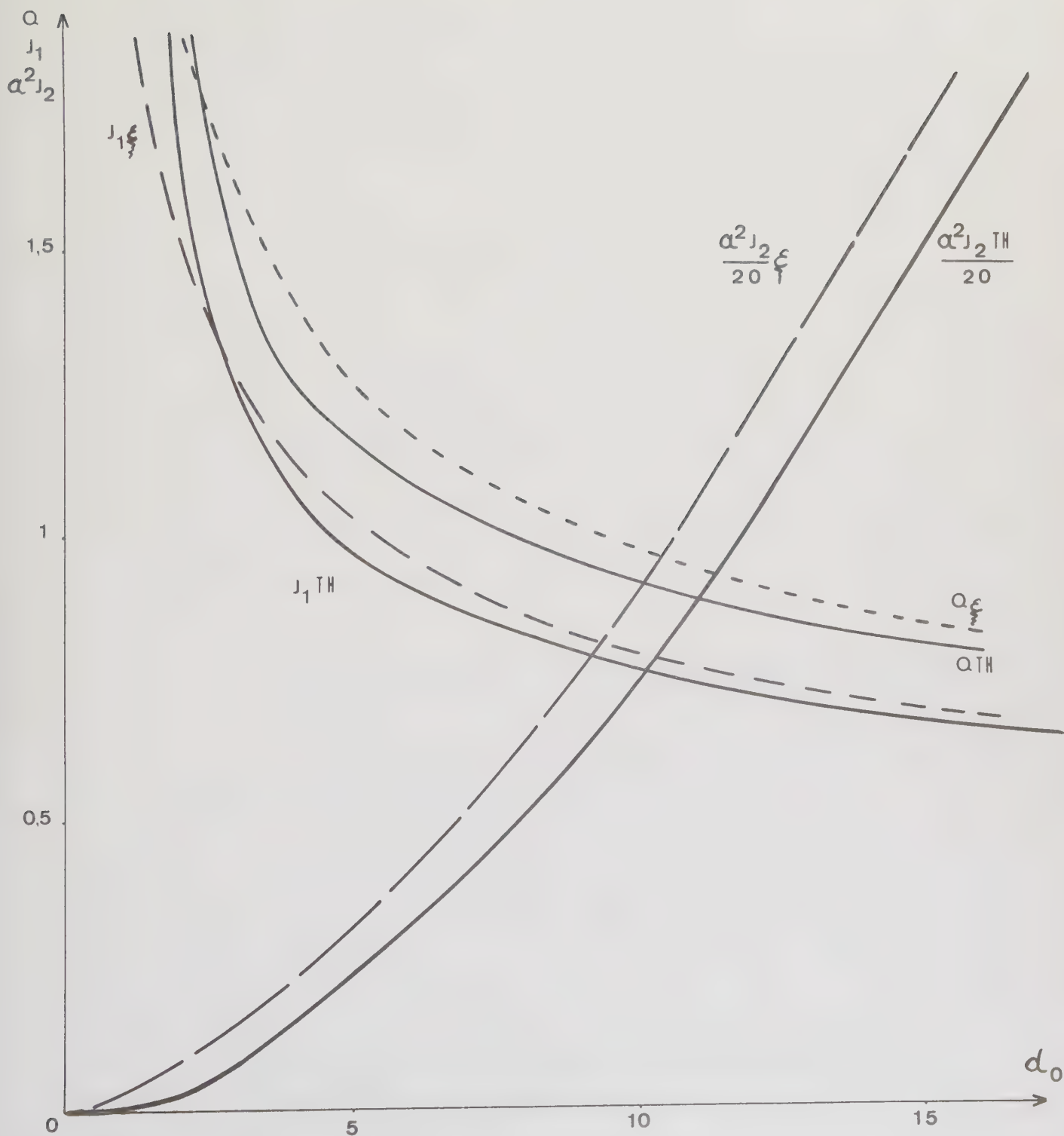
Figure 24.

$$\text{on a } H''(s) = \frac{d_2 - 2\xi}{d_0} s \left(s + \frac{d_2}{2} + \right).$$

Les intégrales quadratiques de l'erreur et du signal de commande pour un échelon unité sont

$$J_1 = \int_0^{\infty} \xi^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(F(s) - 1)(F(-s) - 1)}{-s^2} ds$$

Figure 25.



Variations des intégrales J_1 , J_2 , Q , en fonction de d_0 pour $\xi = 1,25$ comparées aux variations théoriques

$$J_2 = \int_0^{\infty} i^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{F(s) \cdot F(-s)}{-s^2 G(s) G(-s)} ds$$

dont les tables d'intégrales en s fournissent les expressions

$$J_1 = \frac{(d_2^2 - d_1)d_o + d_1^2 d_2}{2d_o(d_1 d_2 - d_o)} = \frac{(5d_1 - 6X_o)d_o + d_2}{2d_o(d_1 d_2 - d_o)} \quad (7)$$

$$J_2 = \frac{d_o^2}{a^2} \frac{(d_1 - 2X_o)d_o + d_2}{2d_o(d_1 d_2 - d_o)} \quad (8)$$

La fonction coût $Q = J_1 + \frac{J_2}{\beta^2}$ est donc

$$Q = \frac{(3d_1 - 4X_o)d_o + d_2}{d_o(d_1 d_2 - d_o)} \quad (9)$$

La figure 25 représente les variations de J_1 , J_2 et Q en fonction de d_o pour $\xi = 1,25$.

b) Optimisation quadratique pour une entrée en rampe.

Si l'entrée est un échelon unitaire de vitesse $\frac{1}{s}$, la transmittance du système optimal qui lui correspond est

$$F'(s) = \frac{(1 + Ts) d_o}{s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o} = \left(1 + \frac{d_1}{d_o} s\right) F(s) \quad (10)$$

avec $T = \frac{d_1}{d_o}$.

c) Optimisation quadratique pour un échelon non idéal.

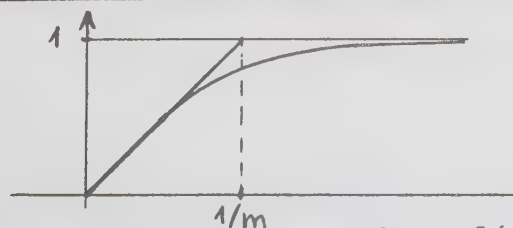


Figure 26.

L'échelon unité réel possède en fait un temps de montée $\frac{1}{m}$ et peut être représenté soit par une rampe de pente m suivie d'un palier, soit par l'exponentielle $1 - e^{-mt}$ de transformée $\frac{m}{s(s+m)}$.

L'optimisation quadratique donne la fonction de transfert optimale

$$F''(s) = \frac{[(m+s)(m^2 + md_2 + d_1) + d_0] d_0}{(m^3 + m^2 d_2 + md_1 + d_0)(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)} = \left[1 + \frac{s}{m} (1 - F(m)) \right] F(s) \quad (1)$$

d) Cas d'une série aléatoire d'entrées en échelon.

La densité spectrale d'une série aléatoire d'entrées en échelon est

$$\Phi_{ee} = \frac{E^2}{a^2 - s^2}$$

pour la densité a .

La fonction de transfert optimale pour une telle entrée est

$$F_a(s) = \frac{1}{YZ} \left[\frac{Z}{Y} \right]_+$$

où

$$Z(s) = \left[\Phi_{ee} \right]^+ = \frac{E}{a + s}$$

et

$$Y(s) = \frac{1}{d_0} (s - q_1)(s - q_2)(s - q_3)$$

donc

$$\left[\frac{Z}{Y} \right]_+ = \frac{-E d_0}{(a + s)(s + q_1)(s + q_2)(s + q_3)}$$

ainsi

$$\left[\frac{Z}{Y} \right]_+ = \frac{E}{Y(a)} \frac{1}{s + a} = \frac{Z(s)}{Y(a)}$$

d'où

$$F_a(s) = \frac{1}{Y(s) Y(a)} = F(a) \cdot F(s) \quad (12)$$

soit

$$F_a(s) = \frac{d_o^2}{(a^3 + a^2 d_2 + a d_1 + d_o)(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o)}$$

e) Optimisation en présence de bruit [XIV]

Si le signal d'entrée est une série aléatoire d'échelons en présence de bruit blanc de densité spectrale $\Phi_{bb} = B^2$, sa densité spectrale est

$$\Phi = \Phi_{ee} + \Phi_{bb} = \frac{E^2}{a^2 - s^2} + B^2$$

La fonction de transfert optimale est alors

$$F_{ab}(s) = \frac{1}{YZ} \left[\frac{Z}{\overline{Y}} \right]_+$$

où

$$Z(s) = \left[\Phi \right]^+ = \frac{B \sqrt{r^2 + a^2} + s}{a + s}$$

r étant le rapport signal/bruit, et

$$Y(s) = \frac{1}{d_o} (s - q_1)(s - q_2)(s - q_3)$$

$$\text{Ainsi } \left[\frac{Z}{\overline{Y}} \right]_+ = B \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{Y(a)} \frac{1}{s + a}$$

d'où

$$F_{ab}(s) = \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{\sqrt{r^2 + a^2} + s} \cdot \frac{1}{Y(s) Y(a)}$$

ou encore

$$F_{ab}(s) = \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{\sqrt{r^2 + a^2} + s} F(a) F(s) \quad (13)$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{\sqrt{r^2 + a^2} + s} \frac{d_o^2}{(a^3 + d_2 a^2 + d_1 a + d_o)(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o)}$$

Dans le cas d'un signal d'entrée en échelon déterministe, $a = 0$,

$$F_b(s) = \frac{r d_o}{(s + r)(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o)}$$

soit

$$F_b(s) = F(s) \frac{1}{1 + \frac{s}{r}} \quad (14)$$

On passe de la fonction de transfert optimale pour une entrée en échelon à la fonction de transfert optimale en présence d'un bruit par un facteur du premier ordre de gain unitaire, dont la constante de temps est l'inverse du rapport signal/bruit.

Dans le premier cas, la réponse est $S(s) = F(s) \frac{E}{s}$ de même densité spectrale que dans le second pour lequel

$$\Phi_{S(s)S(-s)} = F_b(s) F_b(-s) \left[B^2 - \frac{E^2}{s^2} \right] = F(s) F(-s) \frac{-E^2}{s^2}$$

Ce résultat correspond au filtrage optimal du bruit. Si à l'entrée d'une cellule R, C de fonction de transfert $\frac{1}{1 + Ts}$, nous considérons un échelon $\frac{E}{s}$ et un bruit blanc B^2 , la densité spectrale y est

$$\Phi_{ee} = B^2 - \frac{E^2}{s^2} = -\frac{E^2}{s^2} \left(1 - \frac{s^2}{r^2} \right)$$

et la sortie

$$\Phi_{ss} = -E^2 \frac{1 - \frac{s^2}{r^2}}{1 - s^2 T^2}$$

Alors, Φ_{ss} se réduit à $\frac{-E^2}{s^2}$, correspondant à l'échelon seul, si on choisit $T = \frac{1}{r}$ $\boxed{XV}$.

ENTREES	FONCTION DE TRANSFERT OPTIMALE
Echelon $\frac{1}{s}$	$F(s)$
Rampe $\frac{1}{s^2}$	$F'(s) = \left(1 + \frac{d_1}{d_0}\right) F(s)$
Echelon approché $\frac{m}{s(s+m)}$ (m très grand)	$F''(s) = \left[1 + \frac{s}{m} (1 - F(m))\right] F(s)$
Echelons aléatoires $\frac{E^2}{a^2 - s^2}$	$F_a(s) = F(a) F(s)$
Echelons aléatoires avec bruit blanc B^2 et $r = \frac{E}{B}$	$F_{ab}(s) = \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{\sqrt{r^2 + a^2} + s} F(a) F(s)$
Echelon + Bruit	$F_b(s) = \frac{r}{r + s} F(s)$

3) COMPARAISON AVEC LA METHODE DES POLYNOMES NORMAUX.

a) Rapports caractéristiques.

La transmittance optimale est

$$F(s) = \frac{d_0}{s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

avec les relations (3) pour d_2 , d_1 et d_0 .

Les rapports $r_1 = \frac{d_1^2}{d_o d_2}$ et $r_2 = \frac{d_2^2}{d_1}$ ou rapports caractéristiques définis dans la méthode des polynômes normaux à amortissement réglable [IV], sont

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{d_1^2}{d_o d_2} = \frac{1}{d_o d_2} + 2 \\ r_2 &= \frac{d_2^2}{d_1} = 2 - \frac{2 X_o}{d_1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

On remarque que r_1 et r_2 tendent vers la valeur commune $r_c = 2$ quand d_o croît, rapidement pour r_1 , et pour r_2 d'autant plus rapidement que X_o est plus petit.

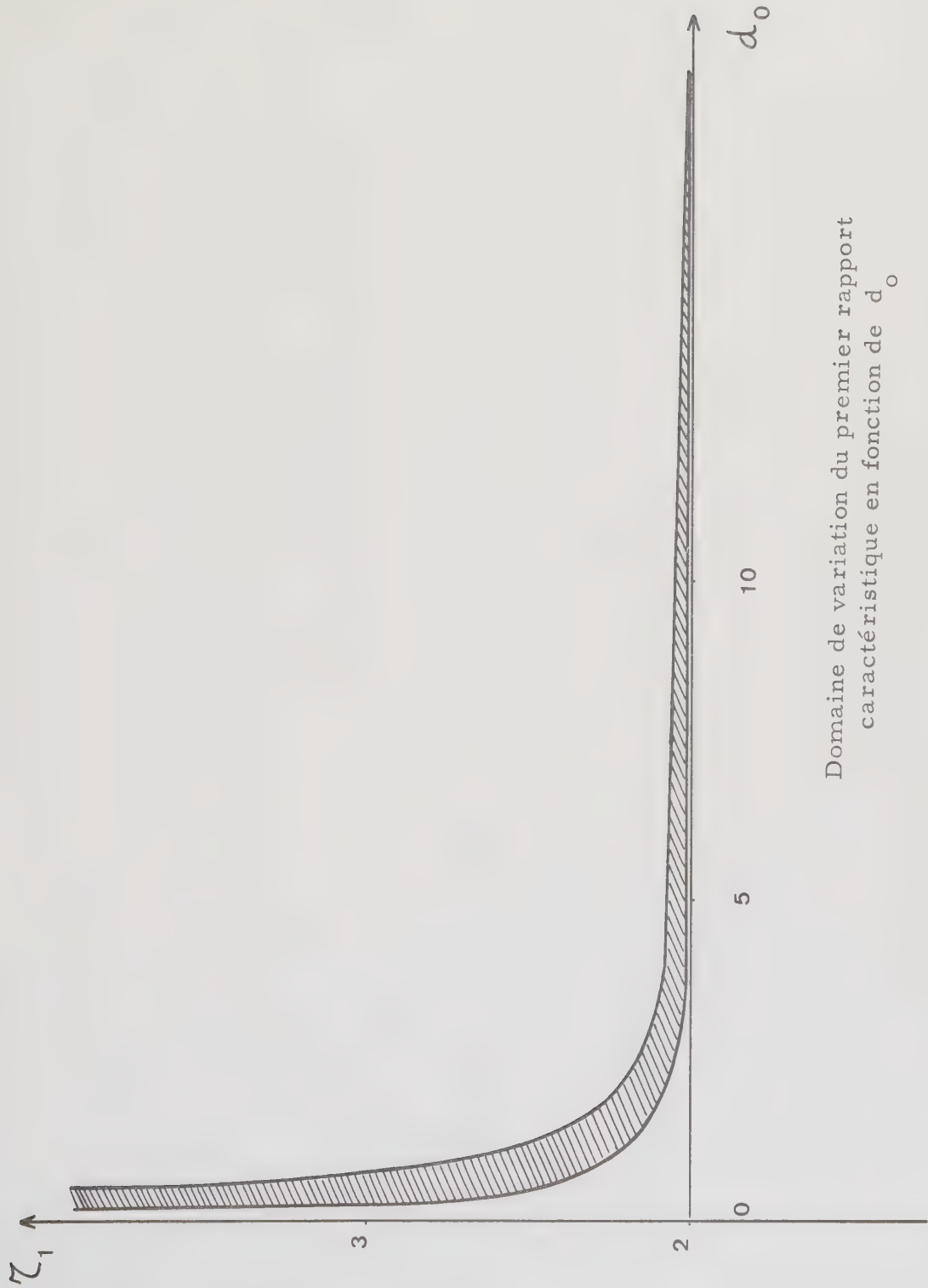
Les figures 27 et 28 représentent les variations des rapports r_1 et r_2 en fonction de d_o : r_1 tend vers 2 par valeur toujours supérieure, et r_2 par valeurs supérieure ou inférieure suivant que X_o est négatif ou positif, donc le coefficient d'amortissement ξ supérieur ou inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour cette dernière valeur, r_2 reste égal à 2 quel que soit d_o .

Cette remarque, qui met en évidence le caractère quasi-optimal des polynômes normaux [XVI] lorsque d_o , donc β , est assez grand, permet d'étudier l'effet de l'optimisation quadratique sur le dépassement D et le temps de réponse t_r de la réponse indicielle.

b) Dépassement et temps de réponse.

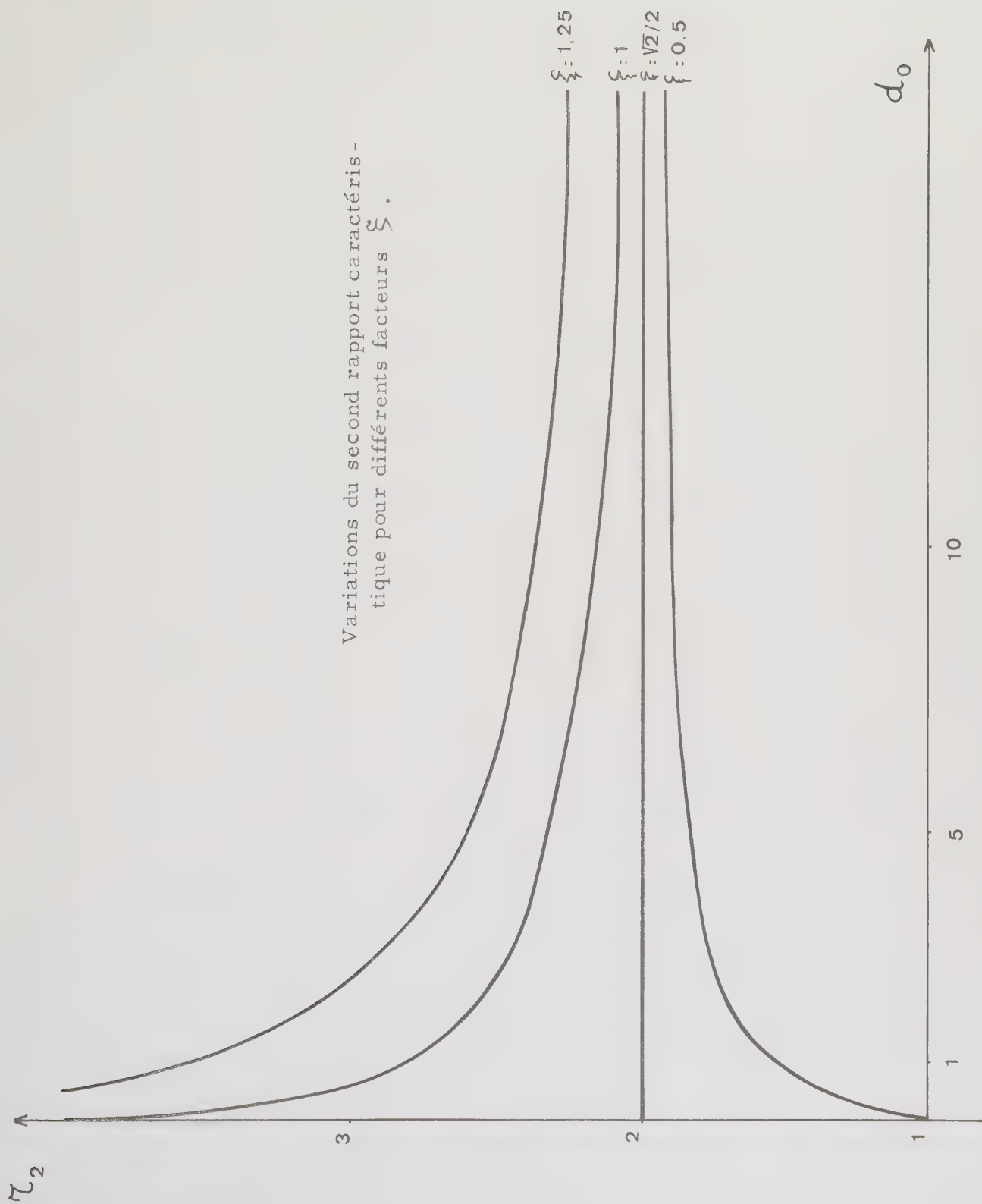
Lorsque d_o est assez grand, $r_1 \neq r_2 \neq 2$, nous pouvons appliquer les relations empiriques relatives à une transmittance à numérateur constant [IV]

Figure 27.



Domaine de variation du premier rapport
caractéristique en fonction de d_0

Figure 28.



$$\left. \begin{aligned} \log D \% &= 4,8 - 2 r_c \quad \text{soit} \quad D \neq 6,3 \% \\ t_r &= \frac{2,2}{\omega_o} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

où $\omega_o = \frac{d_o}{d_1}$ est la pulsation caractéristique. Mais dans les mêmes conditions, on calcule très simplement D et t_r à partir des lieux des carrés des pôles et de la réponse indicielle.

En effet, lorsque d_o croît les carrés des pôles deviennent

$$\begin{aligned} Q_1 &= -q_1^2 = -\rho^2 \\ Q_2 &= -q_2^2 = \rho^2 e^{j\frac{\pi}{3}} \\ Q_3 &= -q_3^2 = -\rho^2 e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

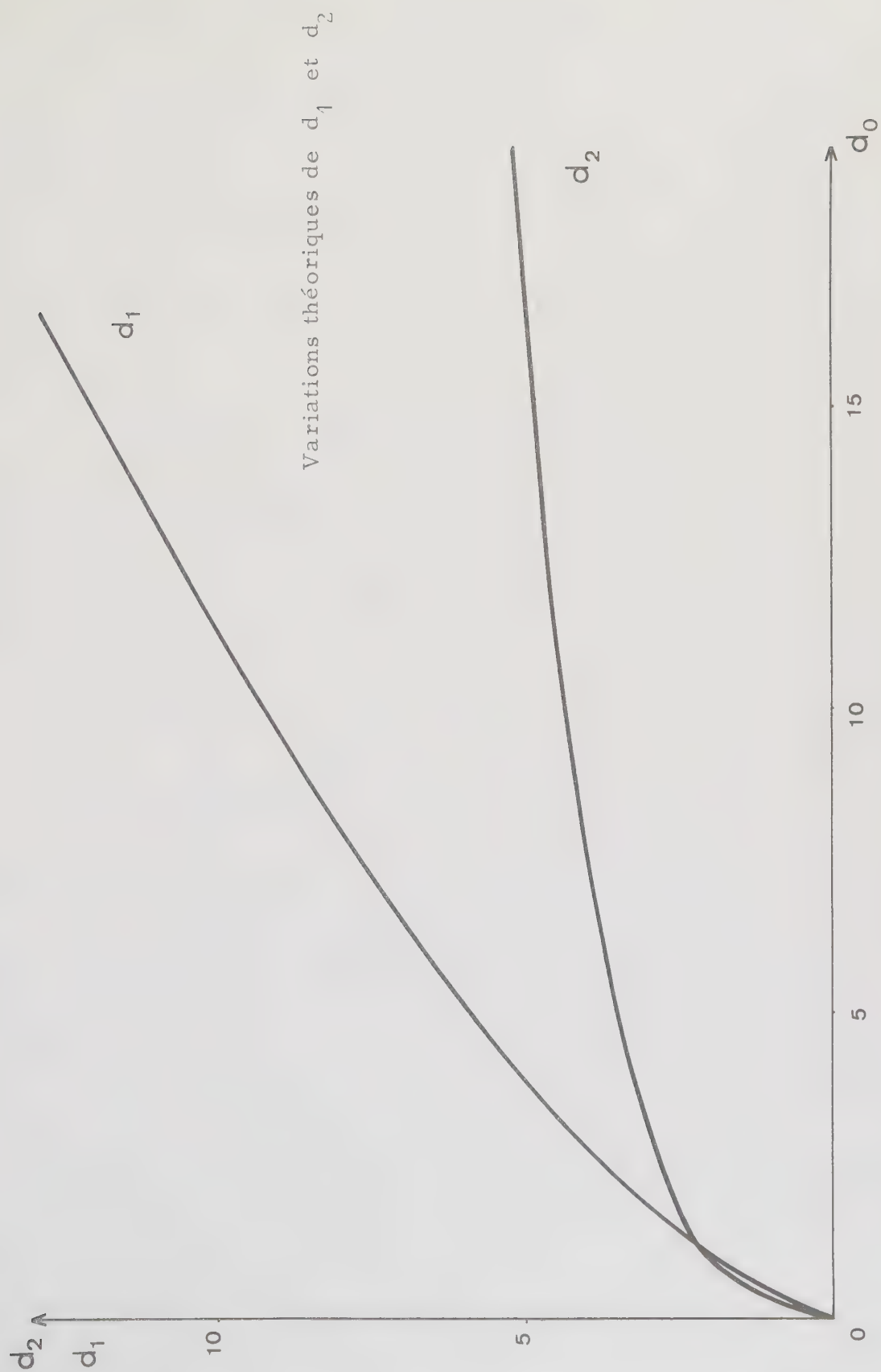
$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -\rho \\ q_2 &= \rho e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ q_3 &= \rho e^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (17) \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} d_o &= \rho^3 \\ d_1 &= 2\rho^2 \\ d_2 &= 2\rho \\ r_1 &= r_2 = 2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ces expressions approximatives (18) donnent immédiatement

$$d_1 = 2 d_o^{2/3} \quad \text{et} \quad d_2 = 2 d_o^{1/3} \quad (19)$$

dont les courbes de variations (figure 29) sont, dès $d_o \gg 2$, très voisines des courbes rigoureuses de la figure 22, la coïncidence étant pratiquement complète pour $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Figure 29.



La réponse indicielle (II-33) est alors

$$s(t) = 1 - e^{q_1 t} + \frac{j}{\sqrt{3}} (e^{q_2 t} - e^{q_3 t})$$

et sa dérivée

$$s'(t) = -q_1 e^{q_1 t} + \frac{j}{\sqrt{3}} (q_2 e^{q_2 t} - q_3 e^{q_3 t})$$

qui par $s'(t_r) = 0$ donne le temps de réponse, avec le dépassement $D = s(t_r) - 1$.

La variable $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho t_r$, est donnée par

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}} \quad (20)$$

soit $x = 4,26$, d'où $t_r = \frac{4,92}{\rho}$.

Le dépassement devient alors

$$D = \frac{j}{\sqrt{3} q_1} (q_3 e^{q_2 t_r} - q_2 e^{q_3 t_r})$$

soit, avec (17),

$$D = -\frac{e^{-x/\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

ou encore, avec (20),

$$D = \frac{1 - 4 \cos^2 x}{3}$$

Finalement, le dépassement et le temps de réponse sont ainsi

$$\left. \begin{aligned} D &\neq 8 \% \\ t_r &= \frac{4,9}{\rho} \quad \text{ou} \quad t_r = 4,9 \frac{d_2}{d_1} \quad \text{ou} \quad t_r \neq 2,45 \frac{d_1}{d_0} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

très proches des valeurs (16).

Dans la mesure où la contrainte sur le signal de commande est large, c'est-à-dire β grand, les expressions précédentes montrent que l'optimisation quadratique tend à fixer le dépassement, et permet de prévoir le temps de réponse [XVII].

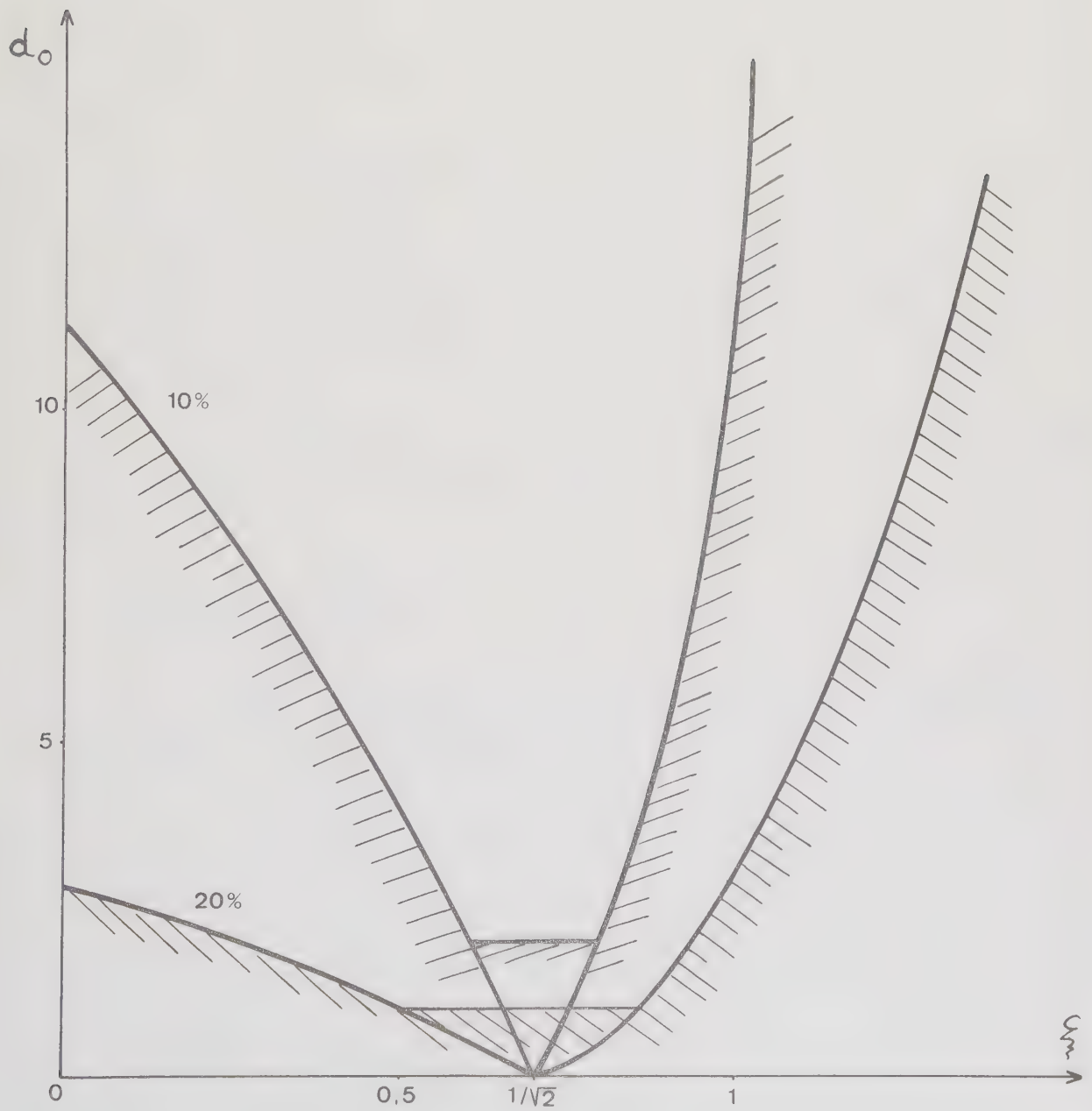
On montre facilement (figure 30) que l'approximation utilisée est satisfaite à $n\%$ près pour

$$d_o \gg \left(\frac{25}{n}\right)^{3/4} \quad \text{et} \quad d_o \gg \left(\frac{50 X_o}{n}\right)^{3/2}$$

ce qui exige pratiquement que $\xi < 1$, et est d'autant mieux réalisée que ξ est plus voisin de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les valeurs de t_r calculées par toutes les formules évoquées en fonction de d_o sont reportées sur le tableau suivant en même temps que les valeurs du temps de réponse t_e et du dépassement D_e déterminées analogiquement pour le système considéré.

ξ	d_o	d_1	d_2	$t_r = \frac{4,9}{\rho}$	$= \frac{4,9d_2}{d_1}$	$= \frac{2,45d_1}{d_o}$	$= \frac{2,2d_1}{d_o}$	t_e	$D_e \%$
0	7,2	7,2	3,5	2,5	2,3	2,4	2,20	2,4	9
$1/\sqrt{2}$	14,4	12	4,9	2,8	2,0	2	1,8	2	8
1	2,7	4,3	3,3	3,5	3,7	3,9	3,5	4	6
1,25	3,2	5	3,9	3,3	3,8	3,8	3,5	3,9	5,5
1,25	16,3	13,5	5,6	1,9	2	2	1,8	2,1	5,6
$\sqrt{3}$	40	26	8	1,4	1,5	1,6	1,4	1,6	7,1



Domaine en d_0 de validité de
l'approximation à 10% ou 20% en
fonction de ξ .

On pourra également consulter un tableau plus complet à la fin de ce travail, obtenu pour différentes valeurs du rapport $\frac{d_0}{d_1}$, ce qui donne bien un temps de réponse pratiquement constant (figure 31).

On voit que la réponse du système est la mieux traduite par l'expression $t_r = 2,45 d_1/d_0$, semblable à $t_r = 2,2 d_1/d_0$, avec cependant un coefficient meilleur pour le cas envisagé.

On note également que la validité de cette première expression reste excellente pour l'installation apériodique où la condition (22) n'est pas satisfaite, d_0 devant cependant être assez grand. A partir de $\xi = 1,25$ toutefois, on peut utiliser la graduation du lieu des carrés des pôles valable pour d_0 proche de $\sqrt{2|X_0|}$.

On verra plus loin comment les résultats précédents s'étendent au cas des installations d'ordre plus élevé.

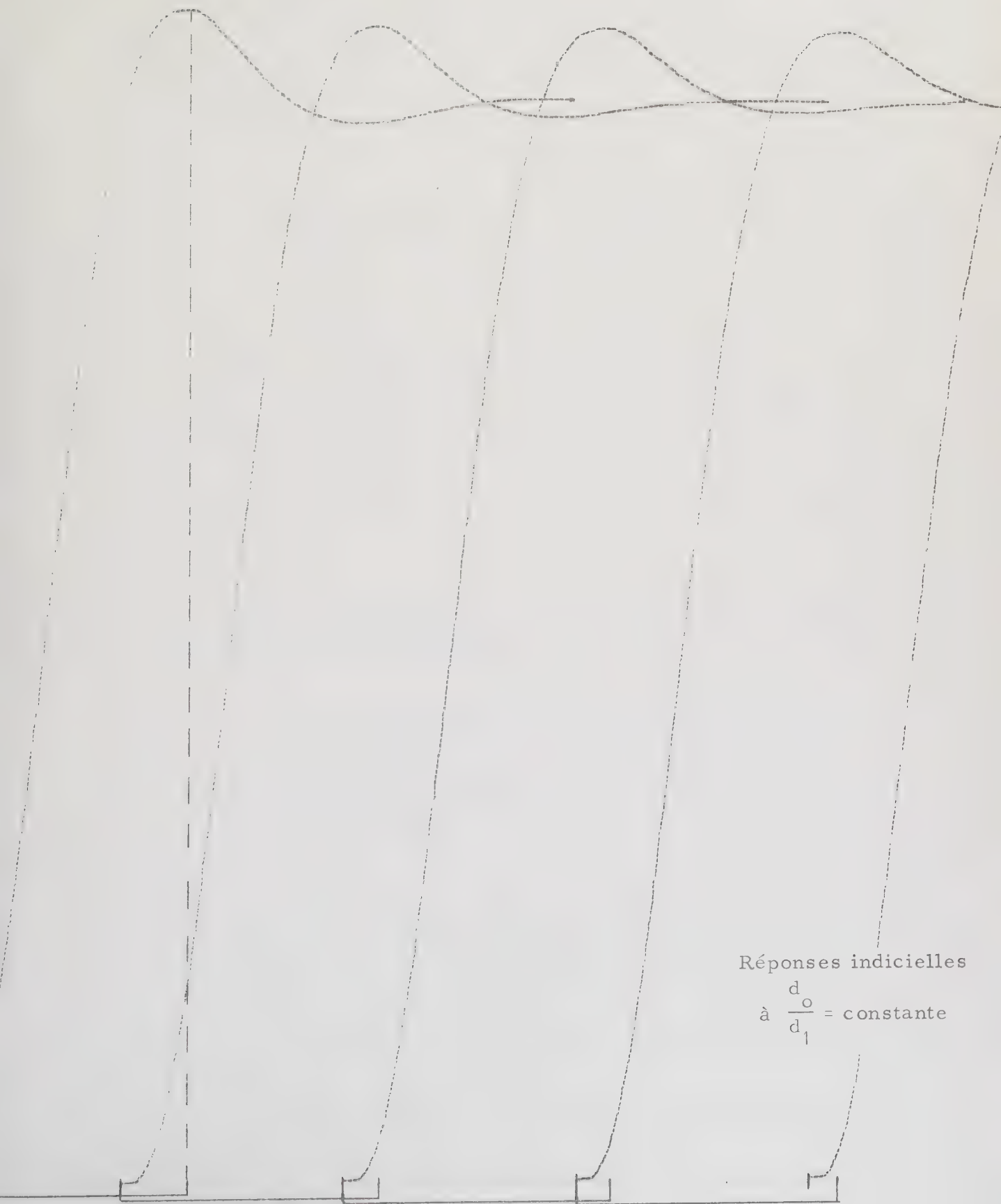
4) FONCTION COÛT.

Les expressions (19) de d_1 et d_2 donnent pour les intégrales J_1 et J_2 et la fonction coût Q ,

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{5}{3 \sqrt[3]{d_0}} = \frac{5}{3\rho} \\ a^2 J_2 &= \frac{3 \sqrt[3]{d_0^5}}{3} = \frac{\rho^5}{3} \\ Q &= \frac{2}{3 \sqrt[3]{d_0}} = \frac{2}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Les tracés de ces fonctions de d_0 (figure 25) sont proches des courbes obtenues par exemple pour $\xi = 1,25$ et permettent donc de

Figure 31.



Réponses indicielles
à $\frac{d_o}{d_1} = \text{constante}$

prévoir rapidement et avec une précision satisfaisante les valeurs de J_1 , J_2 et Q .

Exemple :

	$\xi = 1$, $d_o = 6$		$\xi = 0$, $d_o = 10$	
	d'après calcul	d'après (23)	d'après calcul	d'après (23)
J_1	0,94	0,91	0,75	0,76
$a^2 J_2$	8	6,80	14,2	15,0
Q	1,16	1,11	9	9

5) EXTENSION AUX INSTALLATIONS DU TROISIEME ET QUATRIEME ORDRES SANS INTEGRATION.

Lorsque l'installation est du troisième ordre

$$G(s) = \frac{a}{(s+b)(s^2 + 2\xi s + 1)}$$

on a

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \left[a^2 \beta^2 - (s-b)(s+b)(s^2 + 2\xi s + 1)(s^2 - 2\xi s + 1) \right]^+ = \frac{1}{a\beta} (s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o)$$

Les pôles q_1 , q_2 , q_3 sont les racines à partie réelle négative de l'équation

$$s^6 + s^4(2X_o - b^2) + s^2(1 + 2bX_o) - b^2 - a^2\beta^2 = 0$$

qui permet de définir les coefficients d par les relations

$$\left. \begin{aligned} d_2^2 &= (q_1 + q_2 + q_3)^2 = b^2 - 2 X_o + 2 d_1 \\ d_1^2 &= (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3)^2 = 1 + 2 b X_o + 2 d_o d_2 \\ d_o &= - q_1 q_2 q_3 = \sqrt{b^2 + a^2 \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Les rapports caractéristiques sont alors

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{d_1^2}{d_o d_2} = 2 + \frac{1 + 2 b X_o}{d_o d_2} \\ r_2 &= \frac{d_2^2}{d_1} = 2 + \frac{b^2 - 2 X_o}{d_1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

et tendent également vers la valeur 2 lorsque β croît.

Pour l'installation du quatrième ordre

$$G(s) = \frac{a}{(s^2 + 2 \xi s + 1) (s^2 + 2b \xi' s + b^2)}$$

les pôles q_1, q_2, q_3, q_4 sont les racines à partie réelle négative de

$$s^8 + 2(X_o + b^2 X_o') s^6 + (1 + b^4 + 4X_o X_o' b^2) s^4 + 2b^2 (b^2 X_o + X_o') s^2 + b^4 + a^2 \beta^2 = 0$$

Elles sont les racines de

$$s^4 + d_3 s^2 + d_2 s^2 + d_1 s + d_o = 0$$

avec

$$\left. \begin{aligned} d_3^2 &= 2d_2 - 2(X_o + b^2 X_o') \\ d_2^2 &= 2(d_1 d_3 - d_o) + (1 + b^4 + 4b^2 X_o X_o') \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (26) \\ (\text{début}) \\ \vdots \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} d_1^2 &= 2 d_o d_2 = 2 b^2 (b^2 X_o + X'_o) \\ d_o &= q_1 q_2 q_3 q_4 = \sqrt{b^4 + a^2 \beta^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (26) \\ (fin) \end{array}$$

Les rapports caractéristiques sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{d_1^2}{d_o d_2} = 2 - \frac{2 b^2 (b^2 X_o + X'_o)}{d_o d_2} \\ r_2 &= \frac{d_2^2}{d_1 d_3} = 2 - \frac{2 d_o}{d_1 d_3} + \frac{(1 + b^4 + 4b^2 X_o X'_o)}{d_1 d_3} \\ r_3 &= \frac{d_3^2}{d_2} = 2 - \frac{2(X_o + b^2 X'_o)}{d_2} \end{aligned} \quad (27)$$

Les rapports r_1 et r_3 tendent encore vers 2 lorsque croît et l'on montre que r_2 tend vers 1,7 que nous retrouverons plus loin sous sa valeur rigoureuse $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,707$.

6) GENERALISATION ASYMPTOTIQUE A L'ORDRE n [XVIII].

a) Rapports caractéristiques.

Dans le cas de l'ordre n la fonction de transfert de l'installation est

$$G(s) = \frac{a}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_o}$$

L'optimalisation conduit à la fonction de transfert du système

$$F(s) = \frac{1}{Y(o)Y(s)}$$

avec

$$Y(s) = \left[1 + \frac{1}{\beta^2 G(s) G(-s)} \right]^+$$

Lorsque β croît, $Y(s)$ tend asymptotiquement vers

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \left[a^2 \beta^2 + (-1)^n s^{2n} \right]^+$$

soit

$$Y(s) = \frac{1}{a\beta} \left[s^n + a^2 \beta^2 \right]^+ \quad \text{avec } s^2 = -S, \quad (28)$$

que l'on calcule en employant les polynômes de Butterworth. [XIX]

Ainsi, asymptotiquement, les carrés des pôles de la transmittance optimale de module commun $\rho^2 = (a^2 \beta^2)^{1/n}$ sont

$$Q_\lambda = \rho^2 e^{j \frac{\pi}{n} (-1 + 2\lambda)}$$

où λ varie de 1 à n .

Les pôles q_λ tels que $Q_\lambda = -q_\lambda^2$ à partie réelle négative, sont

$$q_\lambda = +\rho e^{j \frac{\pi}{2n} (-1 + 2\lambda + n)} \quad (29)$$

et forment une progression géométrique de raison $\alpha = e^{j \frac{\pi}{n}}$, dont le premier terme est

$$q_1 = +\rho e^{j \frac{\pi}{2n} (n+1)}$$

et le dernier,

$$q_n = +\rho e^{j \frac{\pi}{2n} (3n-1)}$$

Le dénominateur de la transmittance $F(s)$ s'écrit

$$D(s) = (s - q_1) (s - q_2) \dots (s - q_n) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} (s - q_\lambda)$$

soit

$$D(s) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0$$

En posant $\frac{s}{q_1} = x$, on a

$$\begin{aligned} \frac{D(s)}{q_1^n} &= Q(x) = (x-1)(x-\alpha) \dots (x-\alpha^{n-1}) \\ &= x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Les coefficients d_k et a_k sont liés par

$$d_k = a_k q_1^{n-k} \quad (30)$$

le $k^{\text{ième}}$ rapport caractéristique étant

$$r_k = \frac{d_k^2}{d_{k-1} d_{k+1}} = \frac{a_k^2}{a_{k-1} a_{k+1}}$$

Pour calculer les coefficients a_k , remarquons que

$$\alpha^n (x-1) Q\left(\frac{x}{\alpha}\right) = (x - \alpha^n) Q(x)$$

ce qui donne en identifiant les coefficients de x^{k+1}

$$\alpha^n \left(\frac{a_k}{\alpha^k} + \frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} \right) = a_k + \alpha^n a_{k+1} \quad (31)$$

Comme $\alpha = e^{j \frac{\pi}{n}}$ et $\alpha^n = -1$, on a donc pour le rapport caractéristique r_k ,

$$r_k = 1 + \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{\alpha^k - \alpha^{-k}}$$

soit

$$r_k = 1 + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \quad (32)$$

Cette formule donne ainsi les valeurs limites des rapports caractéristiques de la transmittance optimale pour un système d'ordre n , quand le paramètre de Lagrange β est assez grand.

Remarquons que le premier et le dernier rapports caractéristiques sont égaux à 2 quel que soit l'ordre n , toutes les autres valeurs étant comprises entre 1 et 2 et symétriques, suivant le tableau.

n	2	3	4	5	6	7	8
r_1	2	2	2	2	2	2	2
r_2		2	1,707	1,618	1,573	1,555	1,541
r_3			2	1,618	1,500	1,445	1,414
r_4				2	1,573	1,445	1,382
r_5					2	1,555	1,414
r_6						2	1,541
r_7							2

b) Coefficients de la transmittance optimale [XIX].

Les coefficients (30) de la transmittance optimale $d_k = a_k q_1^{n-k}$ sont liés, d'après (31) par la relation de récurrence

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{1}{q_1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha^{\frac{k}{2}} (\alpha^{\frac{k}{2}} + \alpha^{-\frac{k}{2}})}{\alpha^{\frac{k-1}{2}} (\alpha^{\frac{k+1}{2}} - \alpha^{-\frac{k+1}{2}})}$$

soit

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\cos \frac{k\pi}{2n}}{\sin \frac{k+1}{2n} \pi} \quad (33)$$

avec

$$d_0 = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-q_\lambda) = \rho^n$$

Ces coefficients s'écrivent donc

$$d_0 = \rho^n$$

$$d_1 = \rho^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$d_2 = \rho^{n-2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

$$d_{k+1} = \rho^{n-k-1} \frac{\prod_{j=0}^{j=k} \cos \frac{j\pi}{2n}}{\prod_{j=1}^{j=k+1} \sin \frac{j\pi}{2n}}$$

et

$$d_n = 1$$

En passant en valeurs réduites $\frac{s}{\rho}$, la fonction de transfert devient

$$F(s) = \frac{D_0}{D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0}$$

avec

$$D_k = \frac{d_k}{\rho^{n-k}}$$

On a ainsi les valeurs symétriques

$$D_0 = 1 = D_n$$

$$D_1 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} = D_{n-1}$$

⋮

$$D_{k+1} = \frac{\prod_{j=0}^{j=k} \cos \frac{j\pi}{2n}}{\prod_{j=1}^{j=k+1} \sin \frac{j\pi}{2n}} = D_{n-(k+1)} \quad (34)$$

avec le tableau de valeurs pour des ordres de 0 à 8

ordre n	2	3	4	5	6	7	8
D ₀	1	1	1	1	1	1	1
D ₁	1,414	2	2,62	3,23	3,86	4,49	5,12
D ₂	1	2	3,414	5,22	7,46	10,11	13,15
D ₃		1	2,62	5,22	9,15	14,61	21,82
D ₄			1	3,23	7,46	14,61	25,64
D ₅				1	3,86	10,33	21,82
D ₆					1	4,54	13,15
D ₇						1	5,12
D ₈							1

Ces valeurs des coefficients D peuvent également être obtenues de la façon suivante :

La recherche de $Y(s)$ conduit à résoudre l'équation

$$Y(s)Y(-s) = 1(-1)^n s^{2n} = (D_0 + D_1 s + \dots + D_n s^n)(D_0 - D_1 s + \dots + D_n (-s)^n)$$

où $\frac{s}{\rho}$ est devenu s , et où il s'agit de déterminer le polynôme

$$Y(s) = D_0 + D_1 s + \dots + D_n s^n$$

Cas n pair .

On a

$$Y(s)Y(-s) = 1 + s^{2n} = \prod (s^2 - 2s \cos \frac{k\pi}{2n} + 1)$$

avec k impair variant de 1 à $2n-1$.

Les racines à partie réelle négative sont obtenues lorsque

$$\cos \frac{k\pi}{2n} < 0 \quad \text{soit} \quad k > n.$$

On a alors

$$Y(s) = \prod_{k=n+1}^{2n-1} (s^2 - 2s \cos \frac{k\pi}{2n} + 1) \quad (35)$$

avec k impair

pour $n = 2$ par exemple

$$Y(s) = (s^2 - 2s \cos \frac{3\pi}{4} + 1) = s^2 + \sqrt{2} s + 1$$

Cas n impair .

$$Y(s)Y(-s) = 1 - s^{2n}$$

Cette fois

$$1 - s^{2n} = (1 - s^2) \prod_{k=1}^{n-1} (s^2 - 2s \cos \frac{k\pi}{n} + 1)$$

Les racines à parties réelles négatives correspondent à $k > \frac{n}{2}$ et donnent

$$Y(s) = (s+1) \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} (s^2 - 2s \cos \frac{k\pi}{n} + 1) \quad (36)$$

C'est ainsi que pour $n = 3$, on calcule

$$Y(s) = (s+1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Dans l'un ou l'autre cas, nous retrouvons les coefficients D sans passer par l'intermédiaire des rapports caractéristiques.

Les fonctions de transfert normalisées sont alors

$$F(s) = \frac{1}{\prod (s^2 + 2 \xi_k s + 1)} \quad \text{si } n \text{ est pair} \quad (37)$$

$$\text{avec } \xi_k = -\cos \frac{k\pi}{2n} > 0 \quad \text{et } (n+1) \leq k \text{ impair} \leq 2n-1$$

ou

$$F(s) = \frac{1}{(s+1) \prod (s^2 + 2 \xi'_k s + 1)} \quad \text{si } n \text{ est impair} \quad (38)$$

$$\text{avec } \xi'_k = -\cos \frac{k\pi}{n} > 0 \quad \text{et } \frac{n+1}{2} \leq k \leq n-1$$

Ces valeurs de D peuvent être comparées à celles de D_N obtenues par la méthode des polynômes normaux.

Avec les mêmes coordonnées réduites, et pour un rapport caractéristique commun r , ces derniers coefficients sont

$$D_{Nk} = r^{\frac{k}{2}} (n-k) \quad (41)$$

Lorsque $r = 2$ et pour les ordres n de 2 à 8, nous obtenons le tableau ci-dessous où on passe d'une colonne à la suivante grâce au facteur $r^{k/2}$:

ordre n	2	3	4	5	6	7	8
D_{N0}	1	1	1	1	1	1	1
D_{N1}	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2} = 2,83$	4	$4\sqrt{2} = 5,66$	8	$8\sqrt{2} = 11,31$
D_{N2}	1	2	4	8	16	32	64
D_{N3}		1	$2\sqrt{2} = 2,83$	8	$16\sqrt{2} = 22,62$	64	$128\sqrt{2} = 181$
D_{N4}			1	4	16	64	256
D_{N5}				1	$4\sqrt{2} = 5,66$	32	$128\sqrt{2} = 181$
D_{N6}					1	8	64
D_{N7}						1	$8\sqrt{2} = 11,31$
D_{N8}							1

[XX]

Jusqu'à l'ordre 3, les coefficients D et D_N sont identiques. Au-delà, la concordance reste satisfaisante à condition de prendre pour le rapport commun r une valeur différente de 2.

Cette valeur la plus favorable peut être obtenue rapidement de manière approximative en imposant $D_1 = D_{N1}$, ce qui, pour l'ordre n ,

donne

$$r = \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right)^{\frac{2}{n-1}} \quad (42)$$

Pour $n = 4$, on trouve ainsi $r = 1,89$.

Ce résultat est bien compatible avec la tolérance définie par Naslin [IV] qui remarque qu'en divisant un rapport caractéristique par un facteur correctif m , à condition de multiplier les rapports voisins par m , on ne modifie pas sensiblement la réponse indicielle ; cette règle pour $n = 4$ donne $m = 1,08$ d'où $r = 1,85$. Par (41) et (42), on obtient de nouvelles valeurs de D_{N1} plus proches de D , comme le montrent les tableaux suivants où figurent aussi les temps de réponse et les dépassements calculés comme précédemment ou obtenus expérimentalement.

$n = 2$ $r = 2$	D_o	D_1	D_2	t_r	Dépassement
Optimali- sation	1	$\sqrt{2}$	1	4,44	4,3 %
Polynômes normaux	1	$\sqrt{2}$	1	3,11	6,5 %
Expérience				4,5	4 %

$n = 3$ $r = 2$	D_o	D_1	D_2	D_3	t_r	Dépassement
Optimali- sation	1	2	2	1	4,9	8,3 %
Polynômes normaux	1	2	2	1	4,4	6,5 %
Expérience					4,9	7,8 %

n = 4		D ₀	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	t _r	Dépassement
r = 1,85	D	1	2,62	3,41	2,62	1	5,6	10 %
	D _N	1	2,51	3,42	2,51	1	5,5	12,6 %
r = 1,89	D _N	1	2,62	3,57	2,62	1		
Expérience pour optimisation							5,6	10 %

n = 5		D ₀	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	t _r	Dépassement
r = 1,79		1	3,23	5,22	5,22	3,23	1		
		1	3,20	5,73	5,73	3,20	1	7	13,4 %
Expérience pour optimisation								6,7	12,3 %

Nous avons tracé analogiquement (figures 32 et 33) pour les ordres 4 et 5 les réponses indicielles des systèmes calculés par la méthode des polynômes normaux pour les différentes valeurs des rapports caractéristiques $r = 1,6 ; 1,7 ; 1,8 ; 1,9$ et 2, ainsi que la réponse indicielle du système optimisé. Pour l'ordre 4, cette dernière est très proche de celle correspondant à $r = 1,9$ et pour l'ordre 5 très proche de celle correspondant à $r = 1,8$, ce qui est conforme aux prévisions.

Pour des dépassements équivalents, les temps de réponse sont plus faibles dans le cas de l'optimisation quadratique.

En traçant les réponses des systèmes optimisés, jusqu'à l'ordre 16, on remarque que les temps de réponse réduits sont fort bien

Figure 32.

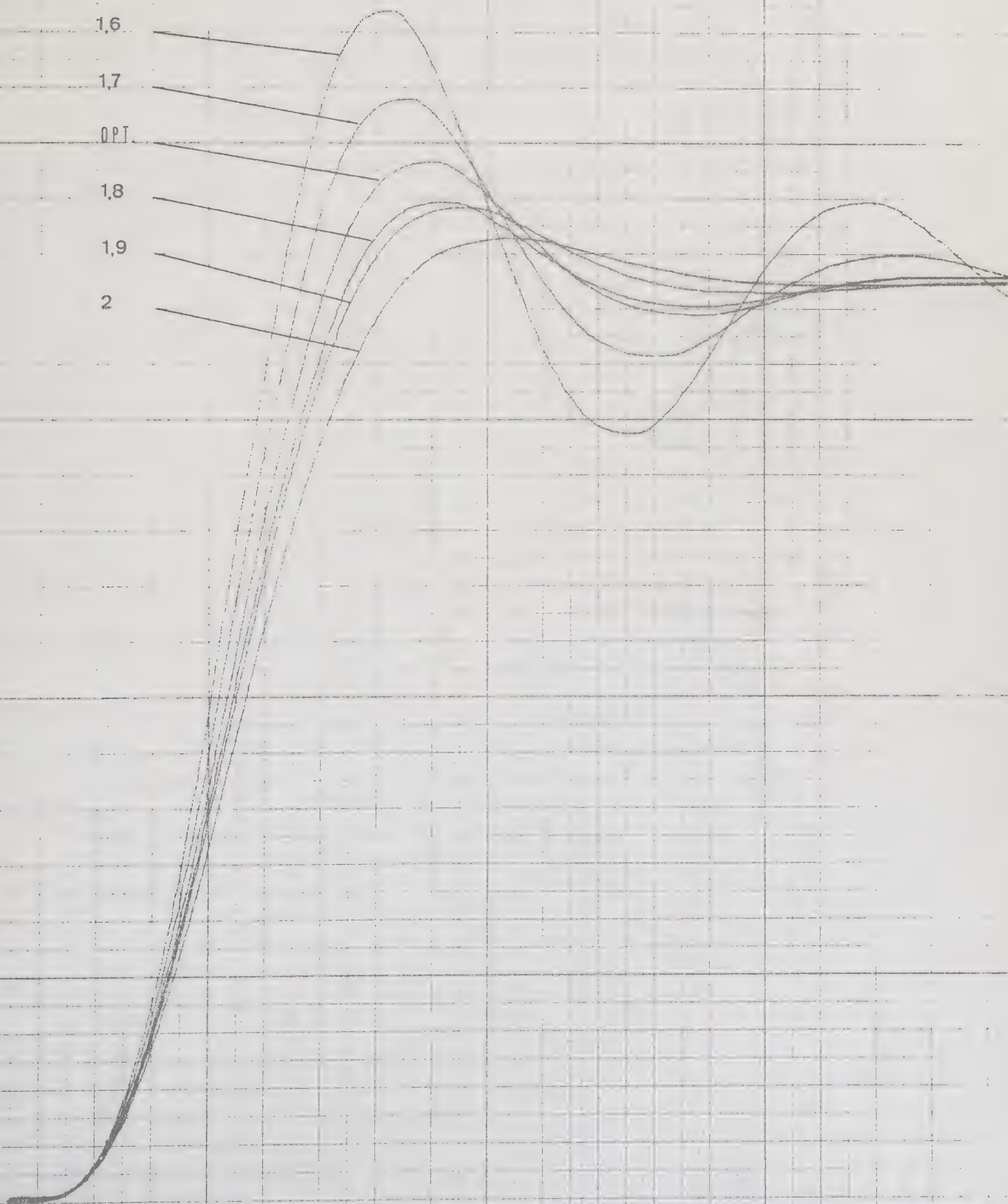
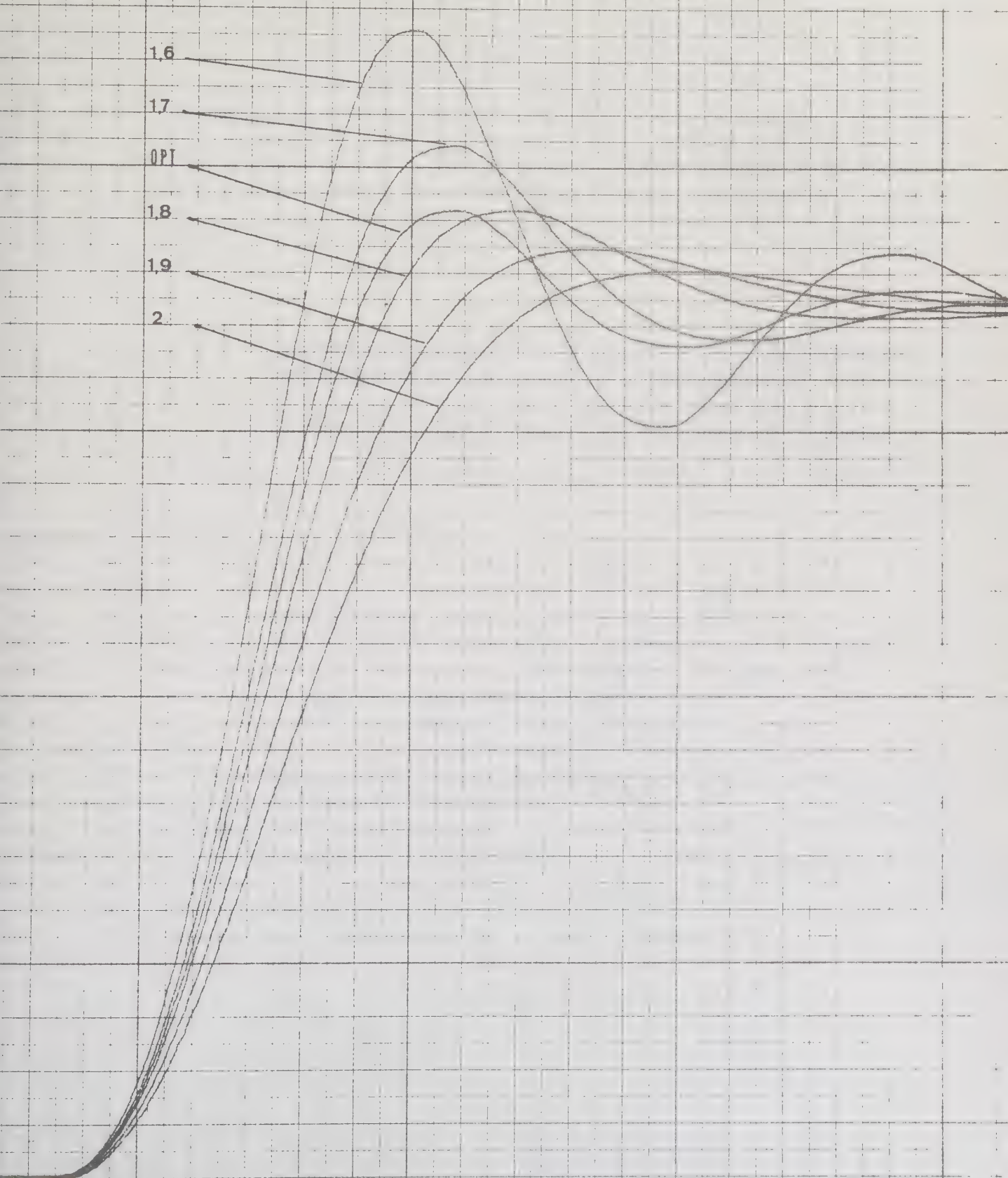


Figure 33.



données par la forme empirique $t_r = 0,64 n + 3,16$.

Les figures 34 à 38 représentent les réponses indicielles pour les ordres n de 2 à 6 dans le cas de l'optimisation et dans le cas d'un rapport caractéristique commun égal à 2. Pour les ordres 2 et 3, elles sont confondues et pour les ordres suivants, présentent une nette amélioration en temps de réponse sans toutefois avoir un dépassement supérieur à 13 %.

c) Fonction de transfert simplifiée dans le comportement asymptotique.

Dans le souci de simplifier les résultats en identifiant le système à un système amorti du second ordre, de multiplicité $\frac{n}{2}$ (si n est pair), on est conduit à la recherche d'un facteur d'amortissement commun ξ_m ou ξ'_m , tel que

$$\prod (s^2 + 2 \xi_k s + 1) \simeq (s^2 + 2 \xi_m s + 1)^{\frac{n}{2}}$$

ou

$$\prod (s^2 + 2 \xi'_k s + 1) \simeq (s^2 + 2 \xi'_m s + 1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Si pour ξ_m on choisit la moyenne arithmétique des facteurs ξ_k , les coefficients D_1 et D_{n-1} qu'on calcule alors sont identiques à ceux du tableau de la page 60, ce qui justifie ce choix et laisse prévoir une description correcte de la fonction de transfert, comme le confirmeront les tracés analogiques de la réponse indicielle.

Pour $n = 4$ par exemple, on a

$$\xi_m = \frac{\xi_5 + \xi_7}{2} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} \right) \simeq 0,65$$

et $D_1 = D_2 = 2,62$, $D_3 = D_4 = 3,70$

très proches des coefficients du tableau.

Figure 34.

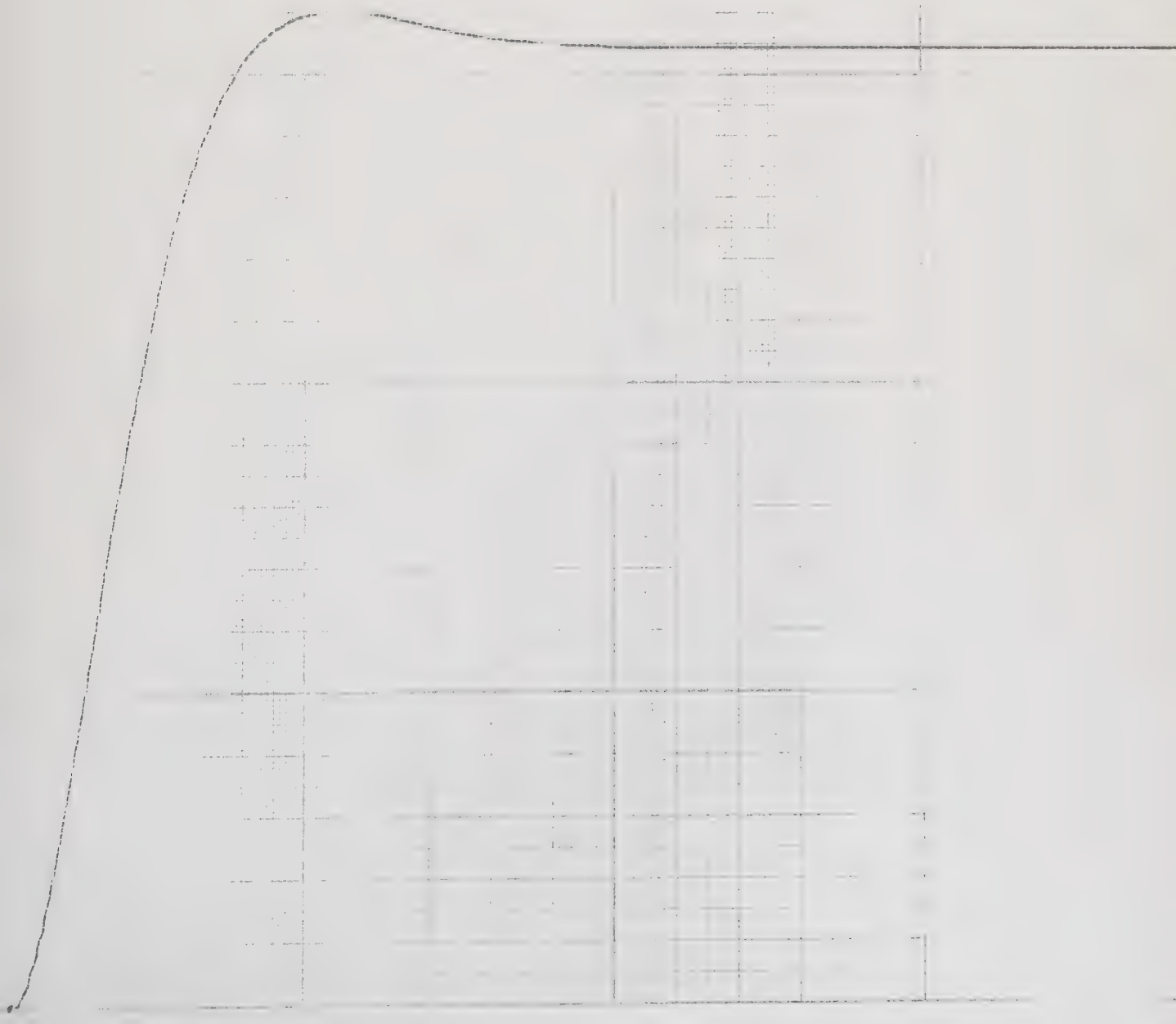


Figure 35.

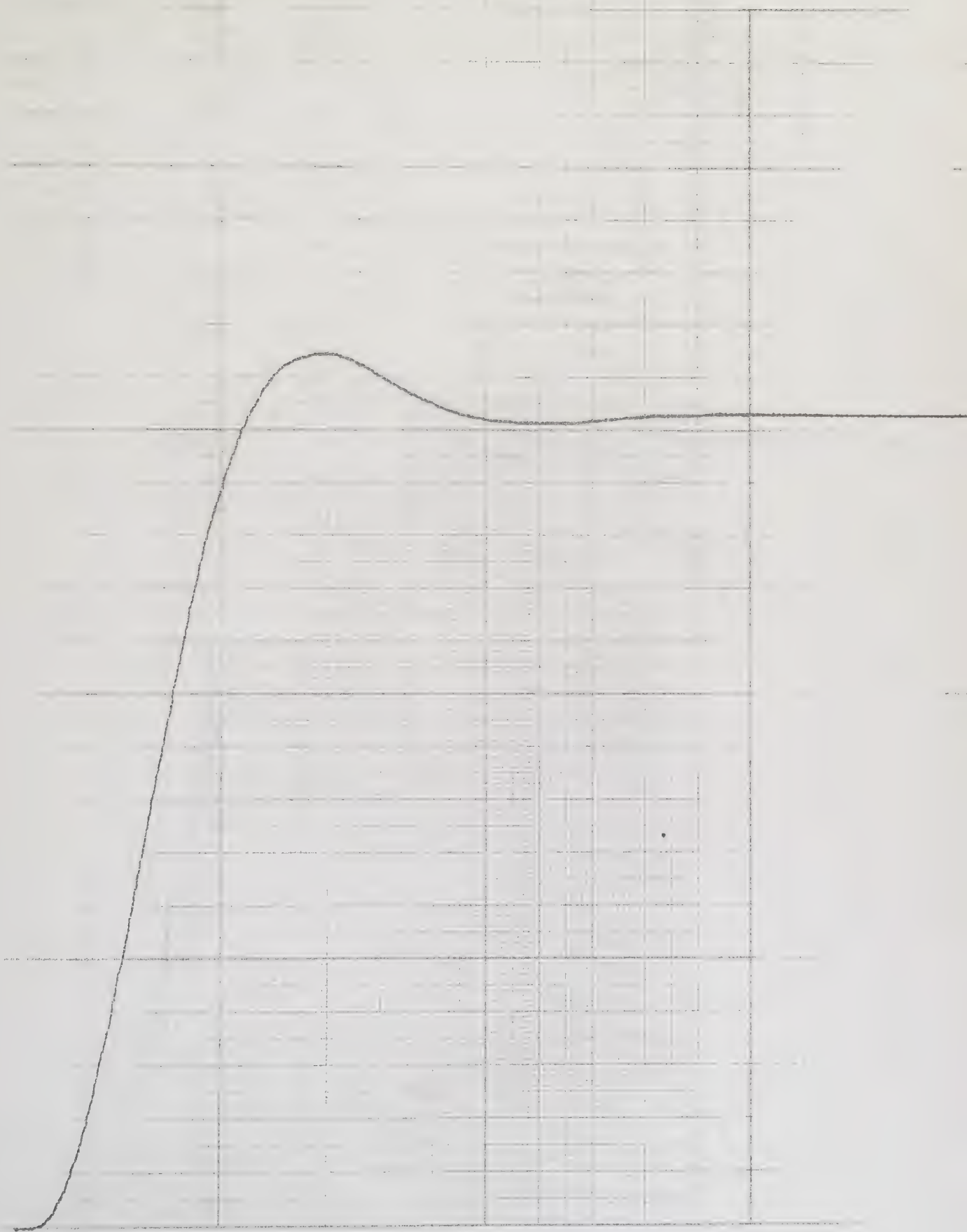


Figure 36.

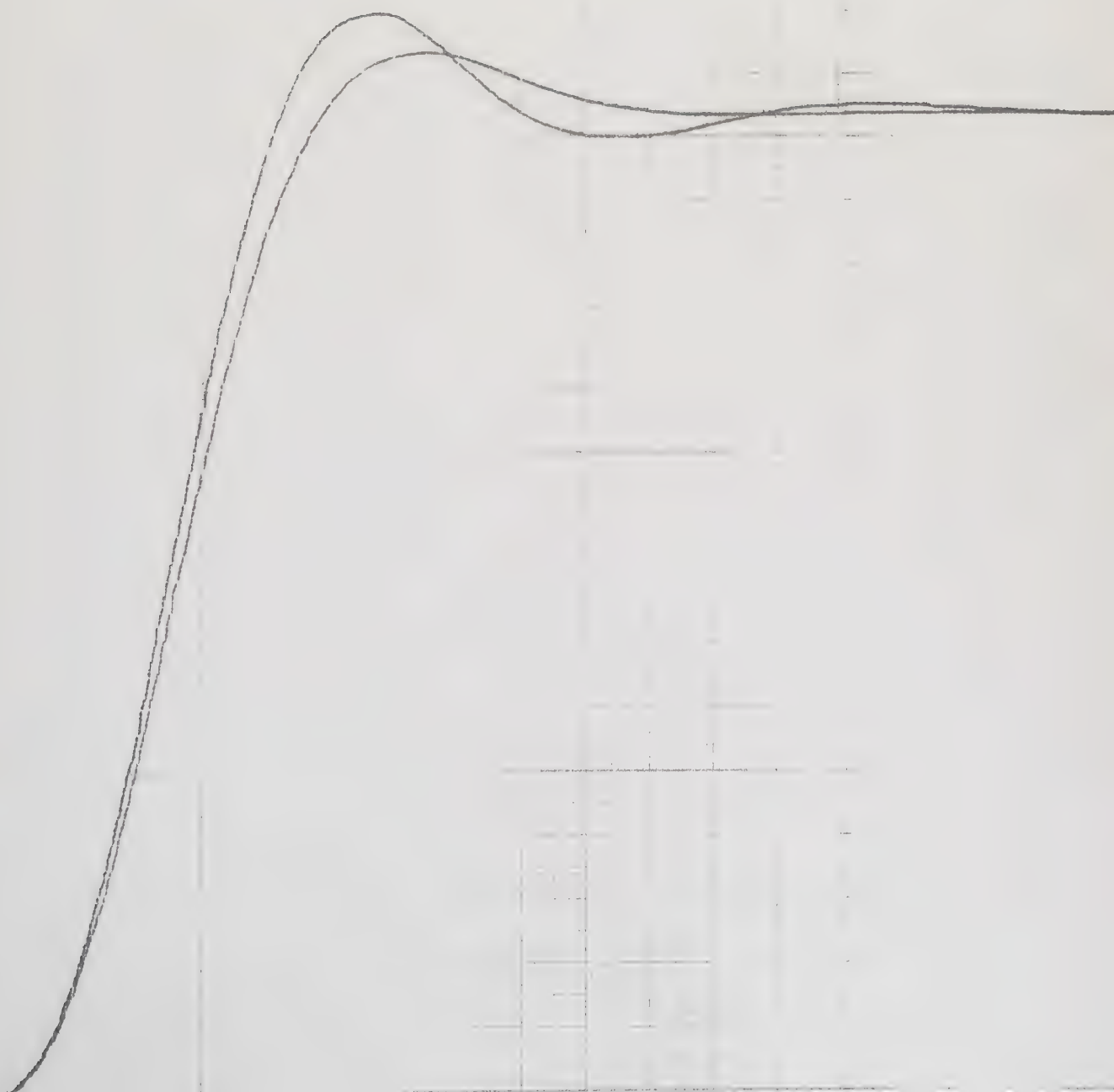
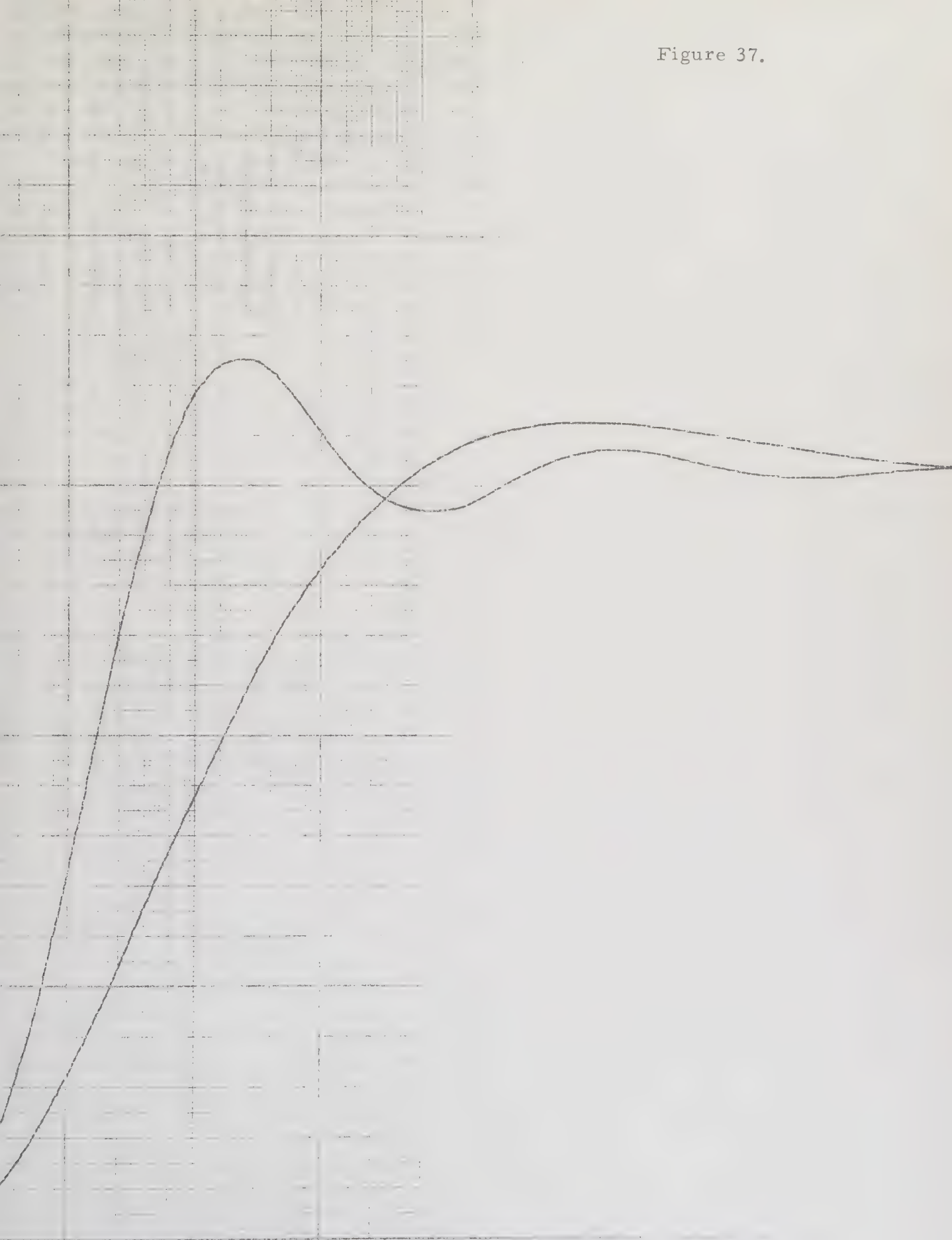


Figure 37.



On peut noter que les valeurs $\xi_m(\xi'_m)$ ainsi proposées dépendent relativement peu de n puisque les valeurs limites pour $n = 2$ et l'infini sont respectivement

n	2	∞	et	n	3	∞
ξ_m	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{2}{\pi} = 0,637$		ξ'_m	$\frac{1}{2} = 0,500$	$\frac{2}{\pi} = 0,637$

On sait d'autre part expliciter dans ce cas la réponse indicielle en fonction du temps t à partir de fonctions de Bessel, ce qui permet en particulier le calcul exact du temps de réponse [XXI].

* . * . * . *

 *
 *
 * CHAPITRE V *
 *
 *

ETUDE DES CORRECTEURS

.....

La méthode quadratique donne un correcteur de fonction de transfert

$$H(s) = \frac{d_0}{a} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{s^2 + d_2 s + d_1} \quad (1)$$

Remplaçons ce correcteur $H(s)$ par $H_1(s)$ de même gain, même écart de trainage et même écart en régime d'accélération, ce qui revient aussi à diviser le numérateur de $H(s)$ par le dénominateur suivant les puissances croissantes de s jusqu'à l'ordre 2.

On obtient ainsi la fonction de transfert d'un PDD²

$$H_1(s) = \frac{d_0}{ad_1} \left[1 + \left(2\xi - \frac{d_2}{d_1} \right) s + \left[1 - \frac{1}{d_1} - \frac{d_2}{d_1} \left(2\xi - \frac{d_2}{d_1} \right) \right] s^2 \right] \quad (2)$$

de la forme $\beta_1 + \gamma_1 s + \delta_1 s^2$.

Comparons les coefficients de ce correcteur à ceux obtenus pour le correcteur de même type calculés par la méthode des polynômes normaux, et de la forme

$$H_2(s) = \beta_2 + \gamma_2 s + \delta_2 s^2$$

Pour simplifier les calculs, plaçons-nous dans une région où δ_1 est nul ou négligeable devant β_1 et γ_1 et comparons ces coefficients à ceux du correcteur PD dont la fonction de transfert se réduit à $H_2(s) = \beta_2 + \gamma_2 s$.

Il suffit pour cela de consulter les tables établies à la fin de ce travail pour différentes valeurs de ξ .

a) Calcul de β_2 et γ_2 .

La fonction de transfert de l'installation étant

$$G(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2\xi s + 1)}$$

en cascade avec le correcteur

$$H_2(s) = \beta_2 + \gamma_2 s$$

la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$F_2(s) = \frac{a(\beta_2 + \gamma_2 s)}{s^3 + 2\xi s^2 + (1 + a\gamma_2)s + a\beta_2}$$

Les deux rapports caractéristiques sont

$$r_1 = \frac{(1 + a\gamma_2)^2}{2\xi a\beta_2}$$

$$r_2 = \frac{4\xi^2}{1 + a\gamma_2}$$

ce qui donne, dans le cas du polynôme normal, avec $r_1 = r_2 = r$,

$$a \beta_2 = \frac{8 \xi^3}{r^3}$$

$$a \gamma_2 = \frac{4 \xi^2}{r} - 1$$

La présence dans $F_2(s)$ d'un numérateur du premier degré en s impose l'emploi de formules corrigées qui lient le dépassement, le temps de réponse à la vraie valeur du rapport caractéristique [XXII]

$$\log D_2 \% = 1,8 - \frac{2 \xi^2}{4 \xi^2 - r} (r - 1,5) \quad (3)$$

$$t_{r_2} = \frac{1,1 r^2}{8 \xi^3} (4 \xi^2 + r) = \frac{1,1}{a \beta_2} (2 + a \gamma_2) \quad (4)$$

Pour un dépassement de 8 %, soit $\log D \% = 0,9$, la valeur commune r des rapports caractéristiques est

$$r = \frac{2 \xi^2 (5,1 - 2 \log D)}{1,8 + 2 \xi^2 - \log D} = \frac{6,6 \xi^2}{2 \xi^2 + 0,9}$$

qui donne

$$a \beta_2 = \left(\frac{2 \xi^2 + 0,9}{3,3 \xi} \right)^3 \quad (5)$$

et

$$a \gamma_2 = \frac{8 \xi^2 - 3}{6,6} \text{ positif ou nul si } \xi \geq 0,61 \quad (6)$$

et

$$t_{r_2} = \frac{12 \xi^3 (4 \xi^2 + 5,1)}{(2 \xi^2 + 0,9)^3} \quad (7)$$

b) Calcul de $H_1(s)$

$$\text{D'autre part, lorsque } a \delta_1 = \left[1 - \frac{1}{d_1} - \frac{d_2}{d_1} \left(2 \xi - \frac{d_2}{d_1} \right) \right] \frac{d_0}{d_1} \text{ est}$$

très faible ou nul, on a

$$\left. \begin{aligned} a\beta_1 &= \frac{d_o}{d_1} \\ a\gamma_1 &= \frac{d_o}{d_1 d_2} (d_1 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La figure 39 représente les variations des coefficients $a\beta_2$ et $a\gamma_2$ comparées à celles de $a\beta_1$ et $a\gamma_1$ pour des valeurs de ξ supérieures à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ces valeurs sont très comparables entre elles.

c) Etude analogique.

Après avoir réalisé les correcteurs P D de fonction de transfert $H_1(s) = a\beta_1 + a\gamma_1 s$ et $H_2(s) = a\beta_2 + a\gamma_2 s$ et le correcteur

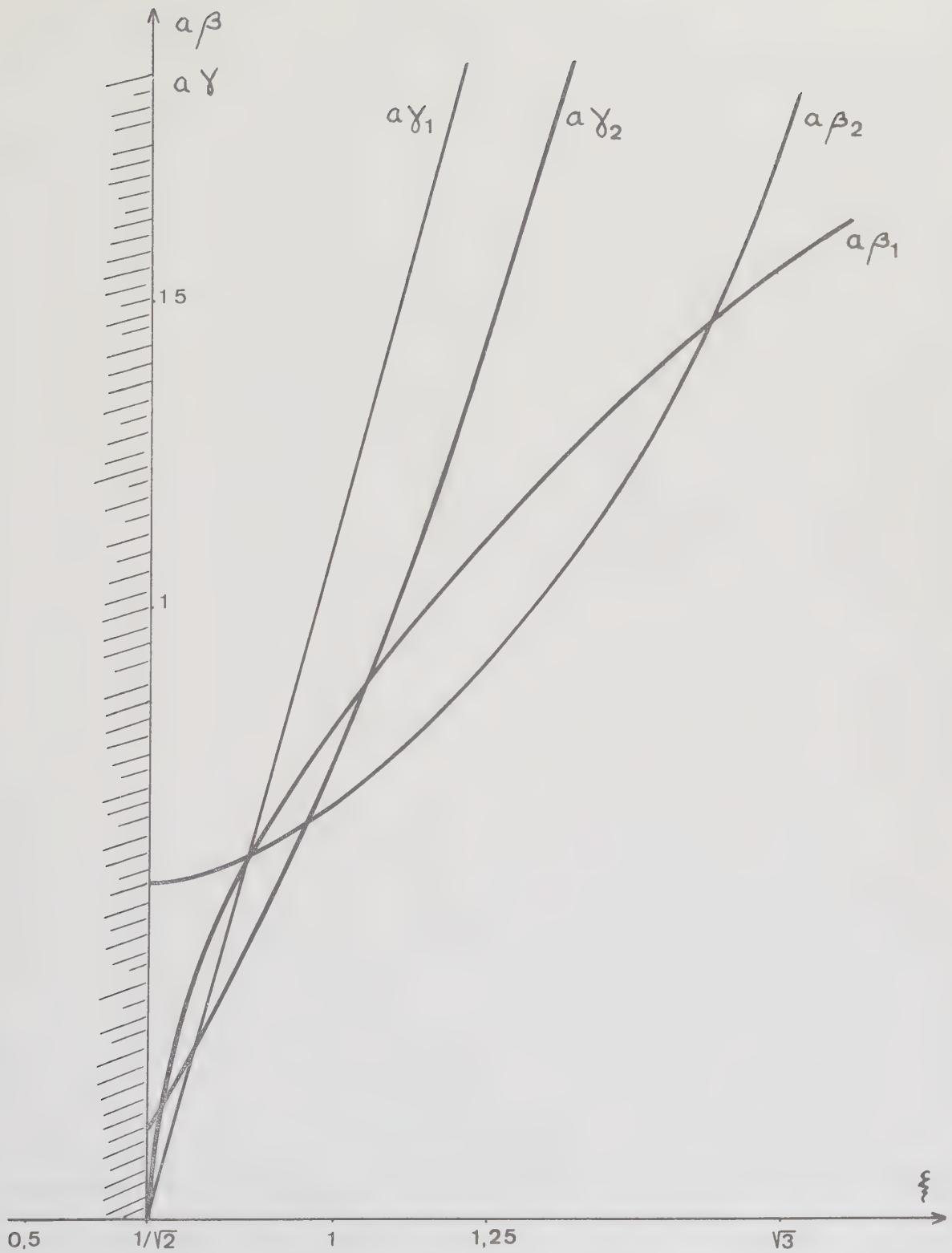
idéal $H(s) = \frac{d_o}{a} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{s^2 + d_2 s + d_1}$, nous avons mis ceux-ci en série

avec l'installation de fonction de transfert $G(s)$, l'ensemble étant bouclé par un retour unitaire. L'étude de la réponse indicielle nous a permis d'étudier et de comparer pour le système ainsi corrigé le temps de réponse t_r , le dépassement D et l'intégrale du carré de l'erreur J_1 , qui pour un correcteur $PD = \beta + \gamma s$ est

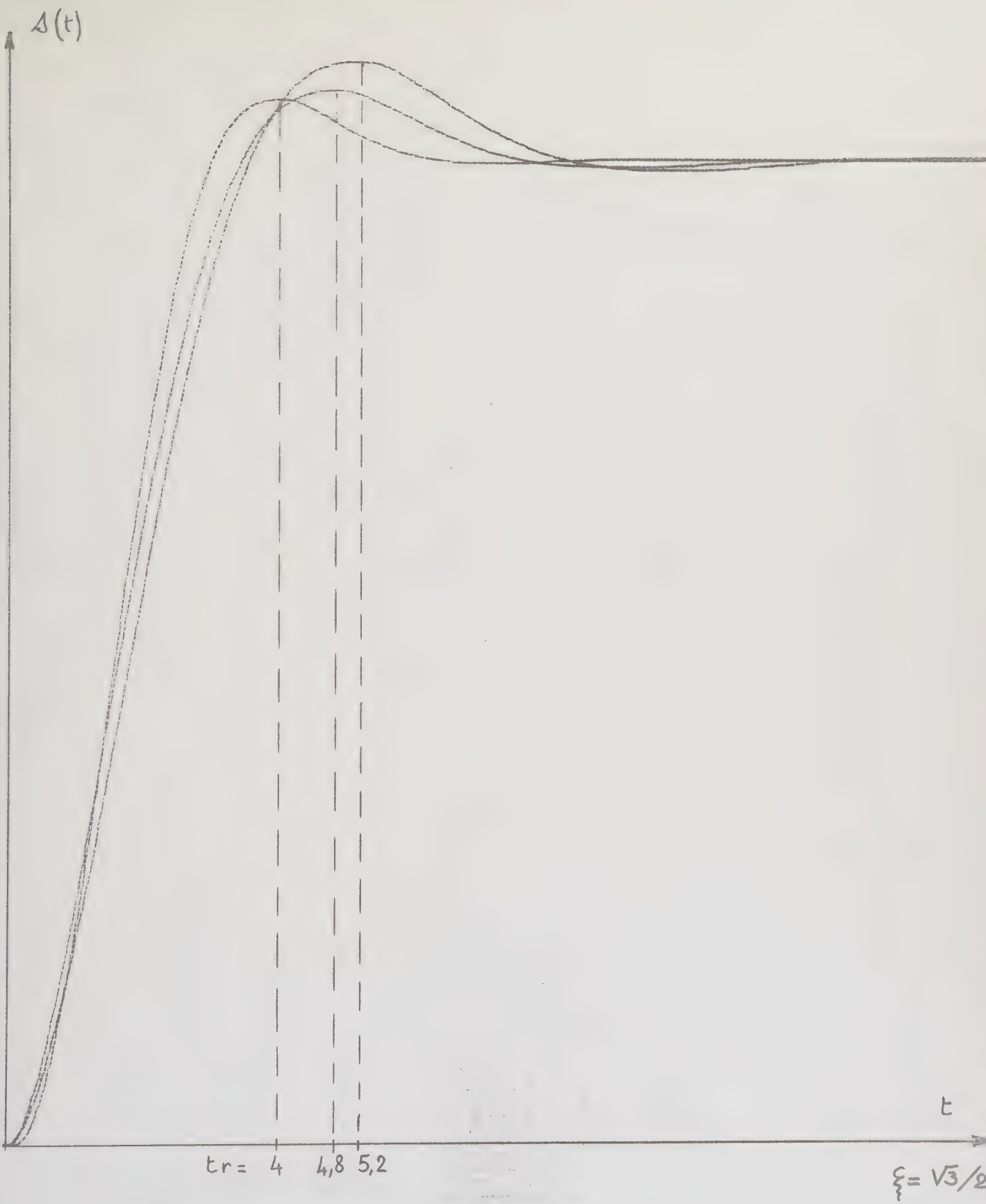
$$J_1 = \frac{a\beta [a\gamma + 1 - 2(2\xi^2 - 1)] + 2\xi}{2a\beta (2\xi(a\gamma + 1) - a\beta)} \quad (9)$$

Les courbes des figures 40 à 43 représentent chacune trois réponses indicielles correspondant respectivement aux correcteurs $H(s)$ $H_1(s)$, $H_2(s)$ calculés pour quatre valeurs de ξ . Dans les quatre cas, les résultats correspondant au correcteur $H_1(s)$ sont plus satisfaisants qu'avec $H_2(s)$, le temps de réponse et le dépassement étant simultanément plus faibles.

Figure 39.



Variations des coefficients
du correcteur PD.



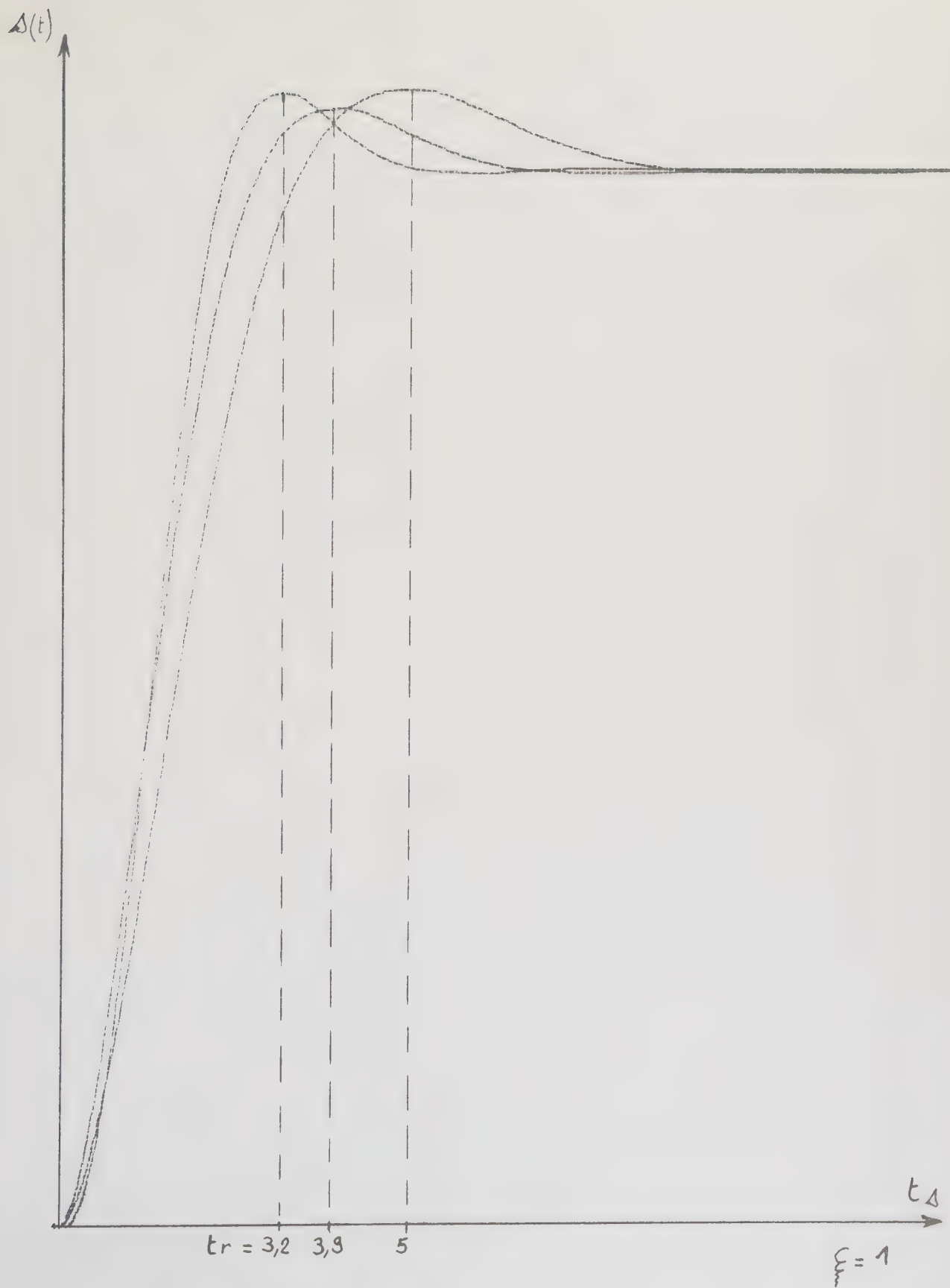


Figure 42.

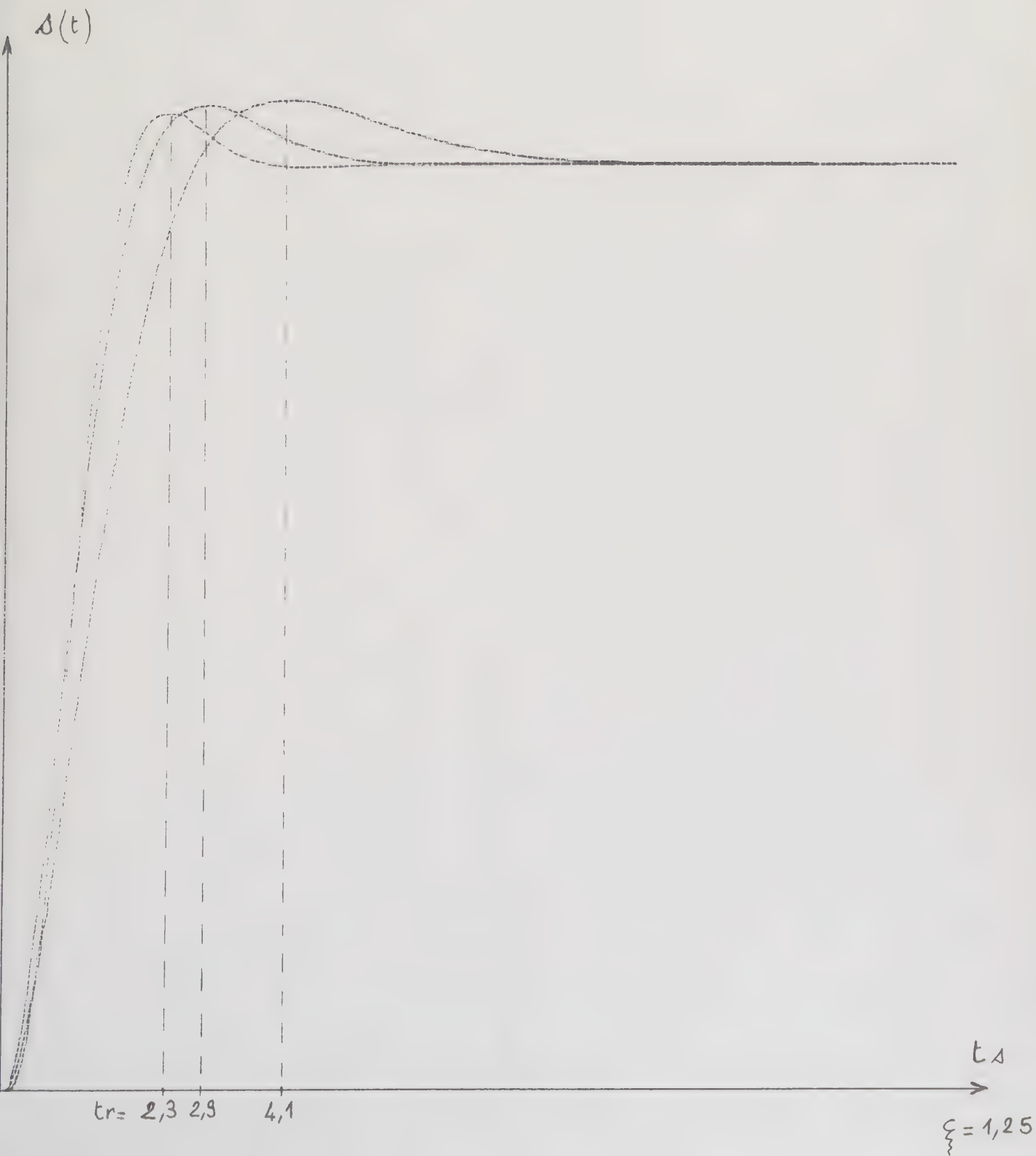
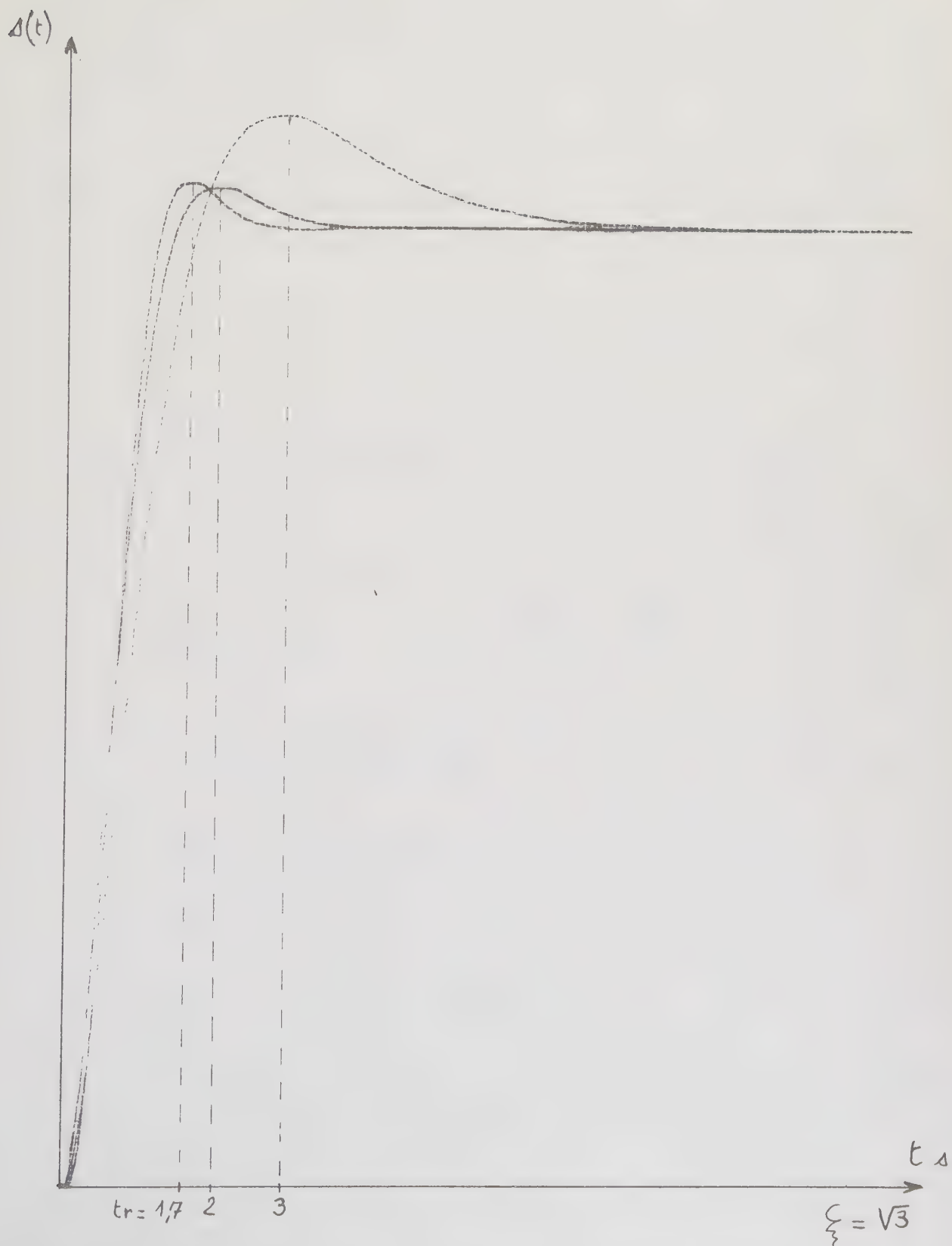


Figure 43.



D'autre part dans le cas du correcteur idéal $H(s)$, les performances obtenues et celles prévues sont assez proches les unes des autres et leur détérioration, lorsqu'on remplace le correcteur $H(s)$ par $H_1(s)$, est finalement peu sensible.

Notons encore que les correcteurs $H_1(s)$ ou $H_2(s)$, de la forme $\frac{\beta + \gamma s}{1 + \varepsilon \tau s}$, ne sont en fait physiquement réalisables que sous la forme $\frac{\beta(1 + \tau s)}{1 + \varepsilon \tau s}$ où ε est en général de l'ordre de $\frac{1}{10}$. [xxiii]

Les calculs suivants montrent que dans le cas où d_0 est faible, on peut obtenir un correcteur sous cette forme réelle.

d) Etude du correcteur pour les faibles valeurs de d_0 .

La fonction de transfert du correcteur peut se décomposer en un produit de transmittances tel que

$$H(s) = \frac{d_0}{a} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{s^2 + d_2 s + d_1} = \frac{d_0}{a} \frac{(s + \sqrt{\frac{T}{T'}})(s + \sqrt{\frac{T'}{T}})}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

à condition qu'au numérateur on ait $\xi \geq 1$ et au dénominateur $d_2^2 - 4d_1 = -2(d_1 + X_0) \geq 0$, soit

$$\left. \begin{aligned} 1 &\leq d_1 \leq -X_0 = 2\xi^2 - 1 \\ 2 &\leq d_2 \leq 2\sqrt{-X_0} = 2\sqrt{2\xi^2 - 1} \\ 0 &\leq d_0 \leq \frac{1 - X_0^2}{8X_0} = \frac{\xi^2(\xi^2 - 1)}{2(2\xi^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Pour des constantes de temps dans un rapport 20 par exemple ($\xi \simeq 2,34$ et $X_0 = -10$) on doit avoir

$$0 \leq d_0 \leq 7,8$$

$$1 \leq d_1 \leq 10$$

$$4,7 \leq d_2 \leq 6,3$$

Avec $d_0 = 5,25$, $d_1 = 8$ et $d_2 = 5$ on obtient

$$H(s) = \frac{5,25}{a} \frac{(s + 4,47)(s + 0,22)}{(s + 4)(s + 2)} \simeq \frac{0,58}{a} \frac{1 + 5s}{1 + 0,5s}$$

et pour $\xi = \sqrt{3}$, $d_0 = 1,12$, $d_1 = 3$ et $d_2 = 4$

$$H(s) = \frac{1,12}{a} \frac{(s + 3,46)(s + 0,31)}{(s + 3)(s + 1)} \simeq \frac{0,35}{a} \frac{1 + 3,1s}{1 + s}$$

Pour ce dernier correcteur, le tracé analogique de la réponse indicielle donne un temps de réponse $t_r \simeq 8,5$ s et un dépassement D inférieur à 4 % parfaitement en accord avec la graduation du lieu des pôles qui donne $t_r \simeq 7,5$ s et $D = 4,3$ %.

e) Exemples d'application.

Soit l'installation $G(s) = \frac{1}{(1 + s)^3}$ à corriger par exemple par

le PID : $\frac{\alpha}{s} + \beta + \gamma s$.

En boucle fermée, la fonction de transfert est

$$F(s) = \frac{\alpha + \beta s + \gamma s^2}{\alpha + s(1 + \beta) + s^2(3 + \gamma) + 3s^3 + s^4}$$

Avec les trois rapports caractéristiques r_1 , r_2 , r_3 tels que $r_1 = r_3$ et en posant $r^3 = r_1 r_2 r_3$, on a

$$\gamma + 3 = \frac{9}{r_1} ; \quad \beta + 1 = \frac{27}{r^3} ; \quad \alpha = \frac{81}{r^6} \quad (11)$$

Dans le cadre de l'optimisation relative à un quatrième ordre, il faut $r_1 = r_3 = 2$ et $r_2 = 1,7$, soit $r \simeq 1,9$. On obtient avec la coordonnée réduite $\frac{3s}{\sqrt{r^3}}$

$$F(s) = \frac{1 + 1,95 s + 1,13 s^2}{1 + 2,62 s + 3,41 s^2 + 2,62 s^3 + s^4} \quad (12)$$

Si maintenant on applique la méthode des polynômes normaux, avec la même variable réduite, ce qui impose

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1,9$$

on a la fonction de transfert très proche de la précédente

$$F(s) = \frac{1 + 1,95 s + 1,32 s^2}{1 + 2,62 s + 3,60 s^2 + 2,61 s^3 + s^4} \quad (13)$$

pour laquelle on peut prévoir les taux de dépassement et temps de réponse.

L'installation d'ordre 4 [XXIV]

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}$$

corrigée par un PDD² donne dans les mêmes conditions la fonction de transfert en boucle fermée obtenue par l'optimisation

$$F(s) = \frac{0,82 + 1,52 s + 0,84 s^2}{1 + 2,62 s + 3,41 s^2 + 2,62 s^3 + s^4} \quad (14)$$

puis par la méthode des polynômes normaux

$$F(s) = \frac{0,82 + 1,52 s + s^2}{1 + 2,62 s + 3,60 s^2 + 2,62 s^3 + s^4} \quad (15)$$

CONCLUSION

Il existe de nombreuses méthodes d'identification : la détermination des caractéristiques d'une installation du second ordre ne doit donc pas offrir de difficultés particulières, si ce n'est la rapidité et la précision avec laquelle elle doit être réalisée.

Dans le cas de fonctions de transfert à numérateur constant, la double intégration du signal d'erreur donne rapidement ces caractéristiques et peut être généralisée à des systèmes d'ordre plus élevé.

La fonction de transfert du second ordre avec intégration est très fréquemment rencontrée dans les systèmes asservis et il apparaît donc important de savoir optimiser un tel système afin qu'il remplisse des conditions imposées. Une première difficulté est le choix des critères qui reposent en général sur l'emploi de l'indice quadratique qu'il est malheureusement souvent difficile de rattacher aux spécifications demandées.

D'un autre côté, les méthodes pratiques d'optimisation telles que celles des polynômes normaux de Naslin ont le mérite d'être simples et permettent la synthèse d'un système répondant à des conditions imposées concernant surtout le dépassement et le temps de réponse. Ces méthodes par contre ne renseignent pas sur la limite des possibilités du système étudié.

L'un des buts de ce travail a été justement de mettre en évidence les liens qui existent entre une méthode pratique comme celle des polynômes à amortissement réglable et une méthode d'optimisation quadratique portant sur la minimalisation de l'intégrale du carré de l'erreur en

présence d'une contrainte qui a l'avantage de fournir de bonnes possibilités de calcul. La comparaison entre ces deux méthodes montre qu'elles donnent souvent des résultats très voisins, ce qui conduit à profiter des qualités de chacune par exemple pour la simplicité des calculs afin de connaître dépassement et temps de réponse tout en travaillant à la limite des possibilités du système.

Nous avons donc en premier lieu déterminé la fonction de transfert optimale du système en appliquant la méthode d'optimisation par les moindres carrés à l'aide du paramètre de Lagrange.

Une première simplification des calculs est apportée par l'utilisation des lieux des carrés des pôles qui donne par simple lecture pour un coefficient d'amortissement et une valeur de la contrainte, les valeurs des carrés des pôles. Il est évidemment possible de revenir au lieu d'Evans des pôles de la fonction de transfert optimale. L'intérêt de ces lieux est accrue par la possibilité dans certains cas de les graduer en temps de réponse et en dépassement.

Cette méthode graphique a été généralisée aux cas fréquents dans la pratique des systèmes d'ordre n identifiés sous la forme de Strejc.

Une autre manière d'aborder l'optimisation est de déterminer directement les coefficients de la transmittance optimale pour une entrée en échelon. Il est alors facile d'en déduire les transmittances optimales correspondant à d'autres entrées même aléatoires.

Dans le cas où la contrainte est peu sévère, les résultats sont très proches de ceux que donne l'emploi des rapports caractéristiques. Nous avons donc étudié, pour un ordre n quelconque, le comportement asymptotique de ces rapports qui conduisent à la détermination numérique

des coefficients de l'équation caractéristique. Par ailleurs, nous retrouvons ces valeurs en écrivant la fonction de transfert sous la forme de produits de systèmes du second ordre, que nous finissons par écrire sous la forme plus condensée encore d'un système du second ordre de multiplicité $\frac{n}{2}$.

Sous l'une ou l'autre de ces formes, nous profitons de la concordance des résultats pour utiliser les formules de Naslin et prévoir ainsi les temps de réponses et le dépassement. Ces prévisions sont finalement en parfait accord avec les vérifications analogiques ou numériques qui donnent un certain avantage aux résultats de l'optimisation quadratique.

La détermination du correcteur optimal se fait alors directement à partir de la fonction de transfert optimale et il ne reste plus qu'à réaliser physiquement au mieux ce correcteur déterminé sous les formes théoriques les plus courantes de PD , PID ou PDD².

Là aussi, les résultats expérimentaux concordent avec nos calculs et donnent encore un avantage au correcteur déduit de la méthode d'optimisation.

* . * . * . *

BIBLIOGRAPHIE

- I . M. PELEGRIN, J.C. GILLE, P. DECAULNE, Les organes des systèmes asservis, Dunod, 1965.
- II . S.S. CHANG, Synthèse des systèmes à commande optimale, Dunod, 1966.
- III . V. STREJC, Détermination approchée des caractéristiques de régulation d'un processus à réponse apériodique, Automatisme, tome V, Mars 1960.
- IV . P. NASLIN, Technologie et calcul pratique des systèmes asservis, Dunod, 1968.
- V . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Identification de systèmes apériodiques du second ordre par intégration du signal d'erreur. Comparaison avec des méthodes graphiques, l'Electricité Electronique Moderne, n° 237, octobre 1969.
- VI . V. BROIDA, L'extrapolation des réponses indicielles apériodiques, Automatisme, mars 1969.
- VII . J. DEBELLE, Détermination de la transmittance d'un système linéaire à partir de sa réponse indicielle, Revue "A", Automatisme IX, 3, 1967.
- VIII . T. KONVERSKI, Synthesis of third order type 1 systems, Control avril 1968.
- IX . MEADOWS, Generalized root loci for third order control systems, Control, avril 1965.
- X . S.E. WILLIAMSON, Design data to assist the plotting of root loci, Control, mai 1968.
- XI . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Lieu des carrés des pôles dans l'optimisation quadratique, Revue "A", Automatisme, n° 4, octobre 1969.
- XII . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Graduation en réponse des lieux des pôles, Automatisme, n° 3, mars 1969.
- XIII . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Root locus and optimization of aperiodic systems using Strejc's method, Revue "A", Automatisme, avril 1970.
- XIV . P. LEFEVRE, Optimisation statistique des systèmes dynamiques Dunod, 1965.
- XV . M. MENAHEM, Sur la correction par dérivation multiple en régulation industrielle, Automatisme, n° 11, novembre 1964 et n° 1, janvier 1965.

- XVI . P. NASLIN, Caractère quasi-optimal des polynômes à amortissement réglable, Automatismes, n° 10, octobre 1968.
- XVII . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Détermination rapide du correcteur et de la réponse d'un système du troisième ordre dans l'optimisation quadratique, C. R. A. S., 269, n° 25, série A, 1230-32, 1969.
- XVIII . C. HUMBERT, J. RAGOT, Comportement asymptotique des rapports caractéristiques dans l'optimisation quadratique, Revue "A", Automatismes, janvier 1970.
- XIX . L. WEINBERG, Network analysis and synthesis, Mc Graw Hill, 1962.
- XX . M. MENAHEM, Indice de qualité et critère de réglage, Automatismes, n° 9, septembre 1964.
- XXI . A. ANGOT, Compléments de mathématiques à l'usage des Ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications, Collection technique et scientifique du C. N. E. T.
- XXII . M. AUBRUN, C. HUMBERT, C. TRICHOT, Méthode analogique pour la détermination de fonctionnements optimaux, Revue "A", Automatismes, paraîtra en juillet 1970.
- XXIII . M. AUBRUN, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Nancy, mars 1970.
- XXIV . R. CHAUSSARD, Utilisation pratique des méthodes d'analyse dynamique, Automatismes, février et mars 1963.
- Utilisation des méthodes d'analyse indiciaire et du critère de Naslin dans le cas des centrales thermiques, Automatismes, septembre 1964.

* . * . * . *

$$\frac{d_0}{d_1} = \text{constante} = 1,2$$

ξ	d_0	d_1	d_2	$\frac{4,9}{\rho}$	$\frac{4,9 d_2}{d_1}$	$\frac{2,45 d_1}{d_0}$	$\frac{2,2 d_1}{d_0}$	t_e	$D_e \%$
0	13	10,8	4,3	2,08	1,95	2,04	1,83	2	8
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	14,4	12	4,8	2,01	1,96	2,04	1,83	2	7
1	15,3	12,7	5,2	1,97	2	2,04	1,83	2,1	7
1,25	16,3	13,5	5,6	1,93	2,03	2,04	1,83	2,1	6,5
$\sqrt{3}$	17,4	14,5	6,3	1,89	2,13	2,04	1,83	2,2	7

$$\frac{d_0}{d_1} = 1$$

0	7,2	7,2	3,5	2,53	2,38	2,45	2,2	2,4	9
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	8,3	8,3	4,1	2,42	2,42	2,45	2,2	2,46	8
1	9,1	9,1	4,5	2,35	2,42	2,45	2,2	2,46	6,5
1,25	10	10	5	2,27	2,45	2,45	2,2	2,5	6
$\sqrt{3}$	11,7	11,7	5,8	2,15	2,43	2,45	2,2	2,5	6

$$\frac{d_0}{d_1} = 0,64$$

0	1,9	3	2,5	3,95	4,08	3,9	3,5	3,7	7
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2,4	3,7	2,7	3,65	3,57	3,9	3,5	3,9	5
1	2,7	4,3	3,3	3,52	3,76	3,9	3,5	4	5,5
1,25	3,2	5	3,9	3,33	3,82	3,9	3,5	3,9	5,5
$\sqrt{3}$	3,9	6,3	4,8	3,12	3,73	3,9	3,5	4,5	4

Temps de réponse et dépassement à $\frac{d_0}{d_1} = \text{constante}$

COEFFICIENTS DU CORRECTEUR PID .

$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \quad X_0 = -0,5$						
d_0	0	0,3	2,5	6,9	14,3	25,4
d_1	1	1,5	4	7,5	12	17,5
d_2	1,7	2	3	4	5	6
r_1	∞	3,7	2	2	2	2
r_2	3	2,6	2,2	2	2	2
$a\beta_1$	0	0,20	0,62	0,92	1,19	1,45
$a\gamma_1$	0	0,08	0,60	1,10	1,57	2,02
$a\delta_1$	0	-0,04	0,01	0,21	0,44	0,68

$\xi = 1 \quad X_0 = -1 \quad T = T'$								
d_0	0	0,7	1,9	3,6	6	9,1	13,1	18
d_1	1	2,1	3,5	5,1	7	9,1	11,5	14,1
d_2	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
r_1	∞	2,5	2,1	2	2	2	2	2
r_2	4	2,9	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
$a\beta_1$	0	0,33	0,54	0,70	0,85	1	1,17	1,27
$a\gamma_1$	0	0,26	0,61	0,91	1,21	1,51	1,83	2,04
$a\delta_1$	0	-0,14	-0,14	-0,07	0,03	0,15	0,28	0,38

$\xi = 1,25 \quad X_0 = -2,125 \quad T/T' = 4$									
d_0	0	0,6	1,25	2,5	4,2	9,1	10,6	16,3	21
d_1	1	2,1	3	4,3	5,9	9,4	10,4	13,5	15,9
d_2	2,5	2,9	3,2	3,6	4	4,8	5	5,6	6
r_1	∞	2,57	2,25	2,05	2,07	2,02	2	2	2
r_2	6,25	3,95	3,40	3	2,71	2,45	2,36	2,30	2,26
$a\beta_1$	0	0,26	0,42	0,58	0,71	0,97	1,02	1,23	1,31
$a\gamma_1$	0	0,29	0,63	0,94	1,30	1,95	2,06	2,58	4,92
$a\delta_1$	0	-0,25	-0,37	-0,37	-0,28	-0,09	-0,06	0,10	0,19

=====

=====

$\xi = \sqrt{3} \quad X_0 = -5 \quad T/T' = 10$								
d_0	0	1	5,5	9,2	14	20	27	40
d_1	1	3	7,5	10,1	13	16,1	19,5	26
d_2	3,46	4	5	5,5	6	6,5	7	8
r_1	∞	2,25	2,04	2,01	2	2	2	2
r_2	12	5,32	3,33	2,97	2,76	2,60	2,52	2,46
$a\beta_1$	0	0,33	0,73	0,91	1,07	1,24	1,38	1,54
$a\gamma_1$	0	0,70	2,05	2,66	3,21	3,80	4,28	4,86
$a\delta_1$	0	-0,72	-0,72	-0,61	-0,49	-0,27	-0,22	0

VU, et PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 1970.

Le DOYEN, J. AUBRY.

